Macroeconomia I – Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans

Mauro Rodrigues
Departamento de Economia, FEA/USP

Abril de 2016

1 Hipóteses

- Tempo contínuo, indexado por $t \in [0, \infty)$.
- Famílias:
  - Há um contínuo de famílias idênticas, distribuídas uniformemente no intervalo $[0, 1]$
  - Modelo de agente representativo
  - Famílias vivem para sempre (horizonte infinito)
  - Cada família possui N_t membros no instante t
    * Como há medida 1 de famílias, N_t é igual à população
    * Cada indivíduo é também um trabalhador, de modo que N_t é também igual à força de trabalho
  - População cresce à taxa constante n:

$$\frac{\dot{N}_t}{N_t} = n$$

- Preferências
  - Utilidade ao longo da vida é separável no tempo

- Em um dado instante s, bem estar de uma família é dado por:

$$U_s = \int_s^{\infty} e^{-\rho(t-s)} u(c_t) dt \tag{1}$$

  c_t: consumo per capita (por membro da família)

- Taxa de desconto subjetiva, ou taxa de impaciência, $\rho > 0$ (constante). Consumo no presente tem mais valor que no futuro; quanto mais afastado um instante de tempo, menor o valor do consumo.
- Utilidade instantânea $u(\cdot)$ crescente e côncava: $u'(c) > 0$, $u''(c) < 0$
- Para evitar solução de canto, utilidade marginal tende ao infinito quando consumo vai para zero:

$$\lim_{c \to 0} u'(c) = \infty$$

- OBS: em tempo discreto, a utilidade ao longo da vida é dada por:

$$\sum_{t=s}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\rho} \right)^{t-s} u(c_t)$$

  a equação (1) pode ser obtida como o limite da equação acima, quando a diferença de tempo entre dois instantes tende a zero.

• Tecnologia:

  - Produto homogêneo (Y_t), gerado com capital (K_t) e trabalho (N_t)
  - Função de produção:

$$Y_t = F(K_t, N_t) \tag{2}$$

  - F satistaz retornos constantes de escala
  - F satisfaz as condições de Inada:

$$\begin{aligned} F(K,0) &= F(0,N) = 0 \\ F_K &> 0,\ F_N > 0 \\ F_{KK} &< 0,\ F_{NN} < 0 \\ \lim_{K \to 0} F_K &= \lim_{N \to 0} F_N = \infty \\ \lim_{K \to \infty} F_K &= \lim_{N \to \infty} F_N = 0 \end{aligned}$$

- Note que $F_K = \partial F/\partial K$ é o produto marginal do capital, que é decrescente com K (ou seja, há retornos marginais decrescentes para cada insumo individualmente). Isso será importante mais à frente, para caracterizar a dinâmica.
- Produto por ser usado para consumo (C_t) ou investimento (I_t); bem de consumo pode ser transformado em bem de investimento sem custos, e vice-versa:

$$Y_t = C_t + I_t \tag{3}$$

- Lei de movimento do capital:

$$\dot{K}_t = I_t - \delta K_t \tag{4}$$

  $\delta > 0$: taxa de depreciação

- Obtendo a restrição de recursos da economia:
  - Variáveis per capita: $c_t = C_t/N_t$, $y_t = Y_t/N_t$, $k_t = K_t/N_t$
  - Combinando (2), (3) e (4):

$$C_t + \dot{K}_t + \delta K_t = F(K_t, N_t)$$

  - Dividindo por N_t e usando o fato de que F satistaz retornos constantes:

$$\begin{aligned} \frac{C_t}{N_t} + \frac{\dot{K}_t}{N_t} + \delta \frac{K_t}{N_t} &= F\left(\frac{K_t}{N_t}, 1\right) \\ c_t + \frac{\dot{K}_t}{N_t} + \delta k_t &= f(k_t) \end{aligned} \tag{5}$$

  em que $F\left(\frac{K_t}{N_t}, 1\right) = F(k_t, 1) \equiv f(k_t)$.

  Exercício: *Dadas as condições de Inada, mostre que $f(0) = 0$, $f'(k) > 0$, $f''(k) < 0$, $f'(0) = \infty$, $f'(\infty) = 0$. Mostre que o produto marginal do capital é $F_K = f'(k)$*

  - Note que:

$$\begin{aligned} \dot{k}_t &= \frac{d(K_t/N_t)}{dt} = \frac{\dot{K}_t N_t - K_t \dot{N}_t}{N_t^2} \\ &= \frac{\dot{K}_t}{N_t} - \frac{K_t}{N_t}\frac{\dot{N}_t}{N_t} = \frac{\dot{K}_t}{N_t} - nk_t \end{aligned}$$

Logo:

$$\frac{\dot{K}_t}{N_t} = \dot{k}_t + nk_t \tag{6}$$

- Combinando (5) e (6), encontramos a **restrição de recursos** dessa economia no instante t, em termos per capita:

$$c_t + \dot{k}_t + (\delta + n)k_t = f(k_t) \tag{7}$$

- Note que, quando ajustamos pela população, o termo de depreciação passa a ser $\delta + n$, incorporando a taxa de crescimento populacional. Isso porque o capital per capita $k = K/N$ se reduz ao longo do tempo (de maneira exponencial) por duas forças: (i) a depreciação física, e (ii) o crescimento populacional, que faz com que o estoque de capital tenha que ser dividido entre um número cada vez maior de agentes.

- Capital é a **variável de estado**
  - Estoque inicial $k_0 > 0$ é dado.

2 Problema do planejador central

- Problema de Pareto – encontrar a alocação eficiente
- Escolha é feita de modo centralizado: planejador conhece as restrições da economia, e seleciona alocações que maximizam bem estar dos indivíduos com base nisso.
  - Não há decisões de famílias e firmas
  - Importante: não há preços no problema do planejador central
- Planejador escolhe as sequências de consumo e capital que maximizam o bem estar da família representativa, dada a restrição de recursos (7) em cada ponto no tempo, e dado o estoque de capital per capita inicial k_0.
  - Seleciona $\{c_t\}_{t\in[0,\infty)}$ e $\{k_t\}_{t\in(0,\infty)}$, de modo a maximizar U_0, dado (7) em todo $t \geq 0$ e dada a condição inicial $k_0 > 0$.

- Resolvendo o problema da perspectiva de $t = 0$

$$\max U_0 = \int_0^\infty e^{-\rho t} u(c_t) dt$$

sujeito a

$$\begin{aligned}
\dot{k}_t &= f(k_t) - c_t - (\delta + n)k_t, \text{ para todo } t \geq 0 \\
k_0 &> 0 \text{ dado} \\
k_t, c_t &\geq 0 \text{ para todo } t \geq 0
\end{aligned}$$

- Hamiltoniano de valor corrente:

$$H_t = e^{-\rho t} u(c_t) + \mu_t [f(k_t) - c_t - (\delta + n)k_t]$$

em que k é a variável de estado, c é a variável de controle e μ é a variável de co-estado.

- Na trajetória ótima:

$$\begin{aligned}
H_c &= 0 \\
H_k &= -\dot{\mu} \\
\lim_{t \to \infty} \mu_t k_t &= 0
\end{aligned}$$

- Logo:

$$e^{-\rho t} u'(c_t) - \mu_t = 0 \tag{8}$$

$$\mu_t [f'(k_t) - (\delta + n)] = -\dot{\mu}_t \tag{9}$$

$$\lim_{t \to \infty} \mu_t k_t = 0 \tag{10}$$

- De (8) segue que:

$$\begin{aligned}
\mu_t &= e^{-\rho t} u'(c_t) \\
\ln \mu_t &= -\rho t + \ln u'(c_t)
\end{aligned}$$

Diferenciando contra o tempo:

$$\frac{\dot{\mu}_t}{\mu_t} = -\rho + \frac{u''(c_t)}{u'(c_t)} \dot{c}_t \tag{11}$$

- Usando (9):

$$-\frac{\dot{\mu}_t}{\mu_t} = f'(k_t) - (\delta + n)$$

Combinando a equação acima com (11), encontramos a **equação de Euler** do planejador central:

$$\rho - \frac{u''(c_t)}{u'(c_t)}\dot{c}_t = f'(k_t) - (\delta + n) \tag{12}$$

- A equação de Euler expressa o tradeoff intertemporal com que o planejador se defronta:

  - O lado esquerdo é o custo marginal de poupar uma unidade adicional (ou seja, postergar consumo), que advém de dois canais: (i) a espera para consumir, expressa pela taxa de impaciência ρ; (ii) o consumo torna-se variável no tempo, e isso aparece na expressão $[-u''(c_t)/u'(c_t)]\dot{c}_t$; consumo variável no tempo é penalizado na função utilidade, dado que ela é côncava (mais sobre isso a seguir).
  - O lado direito é o benefício marginal de investir uma unidade: o sacrifício de consumo hoje permite que o capital cresça no tempo, e isso contribui para aumentar o produto per capita em $f'(k)$, isto é, o produto marginal do capital; mas essa unidade extra de capital sofre depreciação $(\delta + n)$, que entra com sinal negativo no lado direito.
  - No ótimo, o custo marginal é igual ao benefício marginal.

- Por fim, combinando (8) e (10), encontramos a **condição de transversalidade**:

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}u'(c_t)k_t = 0 \tag{13}$$

essa condição indica que, assintoticamente, o valor do capital (em termos de utilidade do consumo no presente) é igual a zero quando t vai para infinito. Isso segue porque o capital não tem valor intrínseco para o agente representativo (sua única função é transferir consumo ao longo do tempo). Se o limite acima fosse positivo, seria possível aumentar toda a trajetória de consumo do indivíduo. Mas, se isso fosse verdade, a solução não seria ótima. Portanto, no ótimo, a condição acima tem que valer.

- Dessa forma, as seguintes equações caracterizam a solução do problema do planejador central:

$$\dot{k}_t = f(k_t) - c_t - (\delta + n)k_t, \text{ para todo } t \geq 0 \tag{14}$$

$$\rho - \frac{u''(c_t)}{u'(c_t)}\dot{c}_t = f'(k_t) - (\delta + n), \text{para todo } t \geq 0 \tag{15}$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t} u'(c_t) k_t = 0 \tag{16}$$

3 Equação de Euler

- Reescreveremos a equação de Euler para ganhar um pouco mais de intuição, e ajudar posteriormente na resolução da dinâmica do modelo.
- De (12) segue que:

$$\left[-\frac{c_t u''(c_t)}{u'(c_t)}\right]\frac{\dot{c}_t}{c_t} = f'(k_t) - (\delta + n + \rho) \tag{17}$$

- A expressão entre colchetes é a curvatura da função utilidade:

$$\text{Curvatura da função utilidade} = -\frac{cu''(c)}{u'(c)} \tag{18}$$

  quanto maior esse valor, mais intolerante é o indivíduo representativo a variações no consumo ao longo da vida.

- Considere dois períodos quaisquer s e t. A taxa marginal de substituição entre consumo em s e consumo em t é dada por:

$$TMS_{c_s,c_t} = \frac{\partial U_0/\partial c_s}{\partial U_0/\partial c_t} = e^{-\rho(s-t)}\frac{u'(c_s)}{u'(c_t)}$$

  que é a inclinação (com sinal de menos) de uma curva de indiferença entre c_s e c_t. Se o indivíduo representativo for relativamente tolerante a variações de consumo ao longo da vida, então a TMS variará pouco se a razão c_s/c_t se alterar (ou seja, há pouca mudança de inclinação ao longo da curva de indiferença). No limite, se c_s e c_t forem substitutos perfeitos, a curva de indiferença é uma reta, e a TMS é constante.

  Quanto mais a TMS variar, menos tolerante será o indivíduo a mudanças de consumo no tempo. Podemos avaliar como a TMS varia ao longo da curva de indiferença, calculando como $u'(c_s)/u'(c_t)$ responde a alterações em c_s/c_t, isto é, a seguinte elasticidade:

$$-\frac{d[u'(c_s)/u'(c_t)]}{d[c_s/c_t]}\frac{c_s/c_t}{u'(c_s)/u'(c_t)}$$

A Figura 1 apresenta um exemplo. A curva indiferença em azul é a de um consumidor relativamente intolerante a trocar consumo em s por consumo em t. A curva indiferença em vermelho é a de um consumidor mais tolerante. Tomando como ponto de partida o ponto A (em que as curvas de indiferença são tangentes, dado que $c_s = c_t$), considere uma redução na fração c_s/c_t, igual para ambos os consumidores (linha OY na figura). Note que a inclinação da curva de indiferença (a TMS) varia mais para a curva de indiferença em azul (consumidor menos tolerante a mudança de consumo no tempo) do que para a curva de indiferença em vermelho (consumidor mais tolerante). A elasticidade, portanto, é maior para o indivíduo com curva de indiferença em azul.

Tomando o limite da elasticidade acima quando a diferença de tempo entre s e t torna-se arbitrariamente pequena (ou seja, avaliando a substituição entre dois períodos arbitrariamente próximos), é possível mostrar que:

$$-\frac{d[u'(c_s)/u'(c_t)]}{c_s/c_t}\frac{c_s/c_t}{u'(c_s)/u'(c_t)} \to -\frac{c_t u''(c_t)}{u'(c_t)}, \text{ quando } s \to t \tag{19}$$

que é a própria curvatura da função utilidade. Portanto, a expressão (18) pode ser interpretada como o grau de intolerância do indivíduo a alterar seu consumo ao longo da vida.

Exercício: *Prove (19)*

- O inverso da curvatura é a **elasticidade de substituição intertemporal**:

$$\sigma(c) = -\frac{u'(c)}{cu''(c)}$$

Quanto mais tolerante o indivíduo a alterar consumo ao longo da vida, menor a curvatura, e portanto maior a elasticidade de substituição intertemporal.

- Caso especial: **CRRA** – *Constant Relative Risk Aversion*

$$u(c) = \begin{cases} \frac{c^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}, \text{ para } \gamma > 0 \text{ e } \gamma \neq 1 \\ \ln c, \text{ para } \gamma = 1 \end{cases}$$

Logo, $u'(c) = c^{-\gamma}$ e $u''(c) = -\gamma c^{-\gamma-1}$

Curvatura $= -\frac{cu''(c)}{u'(c)} = -\frac{c.(-\gamma)c^{-\gamma-1}}{c^{-\gamma}} = \gamma$

$\sigma(c) = 1/\gamma$

Portanto, no caso CRRA, a elasticidade de substituição intertemporal é constante.

Exercício: *Prove que*

$$\lim_{\gamma \to 1} \frac{c^{1-\gamma} - 1}{1 - \gamma} = \ln c$$

- Dada a definição de elasticidade de substituição intertemporal, podemos reescrever a equação de Euler (17) da seguinte forma:

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \sigma(c_t)[f'(k_t) - (\delta + n + \rho)] \tag{20}$$

em que $\dot{c}_t/c_t$ é a taxa de crescimento do consumo per capita.

  - Se $f'(k_t) > \delta + n + \rho$, então o consumo cresce ao longo do tempo; nesse caso, o retorno de acumular capital (dado pelo produto marginal) compensa o custo (dado pela depreciação e a impaciência). Consequentemente, vale a pena poupar, postergando consumo, o qual apresenta uma trajetória ascendente.
  - Como veremos a seguir, à medida que o capital acumula, o produto marginal desse insumo se reduz, diminuindo a diferença dentro do colchete em (20) e a subsequente taxa de crescimento do consumo. Assim, a taxa de crescimento se reduz ao longo do tempo e, no limite, a economia tende ao estado estacionário.
  - Quanto maior $\sigma(c)$, mais a taxa de crescimento do consumo responderá a diferenças entre o produto marginal e o termo de depreciação mais impaciência (maior será $\dot{c}_t/c_t$). Em outras palavras, quanto mais tolerante o indivíduo a mudanças de consumo ao longo do tempo, mais rápida será a transição para o estado estacionário.
  - De maneira análoga, se $f'(k_t) < \delta + n + \rho$, o retorno de acumular capital não compensa o custo. Consequentemente há desacumulação de capital ao longo do tempo. Antecipa-se consumo, o qual apresenta uma trajetória descendente. O mesmo raciocício com relação a $\sigma(c)$ – e a velocidade de convergência – se aplica nesse caso.

4 Estado estacionário

- Retomando as equações que caracterizam a solução do planejador central (deixando de fora a condição de transversalidade por enquanto):

$$\dot{k}_t = f(k_t) - c_t - (\delta + n)k_t \tag{21}$$

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \sigma(c_t)[f'(k_t) - (\delta + n + \rho)] \tag{22}$$

- As equações acima definem um sistema dinâmico em k e c. Antes de avaliar a dinâmica, encontraremos o **estado estacionário**, isto é, a situação em que as variáveis (em termos per capita) não crescem ao longo do tempo:

$$c_t = c^*,\ k_t = k^*,\ y_t = y^*$$

ou:

$$\dot{k}_t = 0 \text{ e } \dot{c}_t = 0$$

- Da equação (22), o capital per capita de estado estacionário é implicitamente dado por:

$$f'(k^*) = \delta + n + \rho \tag{23}$$

- E da equação (21) pode-se encontrar c^*, também implicitamente:

$$c^* = f(k^*) - (\delta + n)k^* \tag{24}$$

Exercício: *Analise como o capital per capita de estado estacionário varia em função dos parâmetros δ, n e ρ. Interprete intuitivamente.*

Exercício: *Suponha a função de produção Cobb-Douglas, isto é, $F(K,N) = K^\alpha N^{1-\alpha}$. Encontre k^*.*

4.1 A regra de ouro

- A regra de ouro indica qual o estoque de capital de estado estacionário que maximiza consumo per capita.

- Em estado estacionário $\dot{k}_t = 0$, isto é, $c = f(k) - (\delta + n)k$. Maximizando com relação a k:

$$f'(k_g) = \delta + n$$

em que k_g é o capital per capita de estado estacionário associado à regra de ouro.

- Comparando com o estoque de capital ótimo de estado estacionário, dado pela equação (23), temos que:

$$f'(k_g) = \delta + n < f'(k^*) = \delta + n + \rho$$

como a função de produção é côncava ($f''(k) < 0$), segue que:

$$f'(k^*) > f'(k_g) \iff k^* < k_g$$

- Em outras palavras, a solução do planejador central implica que o capital de estado estacionário é *menor* do que o da regra de ouro.
  - Maximizar consumo per capita de estado estacionário **não** é ótimo.
  - Fazer isso envolveria custos, associados a postergar consumo ao longo do tempo.
  - Esses custos são expressos pela taxa de impaciência ρ, a qual é responsável pela diferença entre k^* e k_g.

5 Dinâmica

- O estado estacionário é a tendência de longo prazo dessa economia.
- A partir das equações abaixo caracterizaremos a dinâmica:

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \sigma(c_t)[f'(k_t) - (\delta + n + \rho)] \tag{25}$$

$$\dot{k}_t = f(k_t) - c_t - (\delta + n)k_t \tag{26}$$

- Construiremos o diagrama de fases no plano (c, k). Lembrando que k é a variável de estado, ou seja, k_0 será a condição inicial no sistema acima.
- Com base na equação (25), construiremos o locus $\dot{c}_t = 0$, isto é:

$$f'(k_t) = \delta + n + \rho$$

o que, da equação (23), implica que:

$$k_t = k^* \qquad \text{(Locus } \dot{c} = 0\text{)}$$

Em outras palavras, no plano (c, k), o locus $\dot{c} = 0$ é uma linha horizontal, cortando o eixo horizontal em k^* (veja Figura 2). O que acontece à direita de $\dot{c} = 0$, ou seja, se $k < k^*$? Nesse caso, $f'(k) > f'(k^*) = \delta + n + \rho$. Ou seja, a expressão entre colchetes em (25) é positiva, o que implica que o consumo cresce ao longo do tempo. Daí as setas para cima na região à esquerda de $\dot{c} = 0$ na Figura 2.

Analogamente, à direita de $\dot{c} = 0$ temos $f'(k) < f'(k^*)$ e consumo decrescente de acordo com a equação (25). As setas apontam para baixo nessa região da Figura 2.

- Agora passamos para o locus $\dot{k}_t = 0$. Da equação (26), temos que:

$$c_t = f(k_t) - (\delta + n)k_t \qquad \text{(Locus } \dot{k} = 0\text{)}$$

A inclinação no plano (c, k) é dada por:

$$\left.\frac{dc_t}{dk_t}\right|_{\dot{k}_t=0} = f'(k_t) - (\delta + n) \begin{cases} > 0, \text{ se } f'(k_t) > \delta + n \Longleftrightarrow k_t < k_g \\ = 0, \text{ se } f'(k_t) = \delta + n \Longleftrightarrow k_t = k_g \\ < 0, \text{ se } f'(k_t) < \delta + n \Longleftrightarrow k_t > k_g \end{cases}$$

ou seja, a curva é descrita por um "U" invertido, e alcança o máximo justamente no capital per capita da regra de ouro (veja Figura 3).

O que ocorre acima de $\dot{k} = 0$? Considere inicialmente um ponto qualquer no locus, e promova um aumento em c para dado k. De acordo com a equação (26), isso fará com que $\dot{k}$ torne-se negativo. Em outras palavras, pontos acima do locus estão associados a reduções em k, o que explica a seta para esquerda nessa região da figura. Da mesma forma, iniciando em ponto qualquer do locus, e reduzindo c para dado k, teremos $\dot{k}$ positivo. Logo, abaixo do locus as setas apontam para a direita.

- Juntando os locus $\dot{k}_t = 0$ e $\dot{c}_t = 0$, temos o diagrama de fases descrito na Figura 4. Já a Figura 5 mostra o mesmo diagrama, mas explicita mais claramente a dinâmica dessa economia a partir de um estoque de capital inicial dado.

- O estoque inicial de capital $k_0 > 0$ define a condição inicial do sistema. A trajetória ótima é mostrada em laranja. Ela é única e estável, convergindo para o estado estacionário (ponto E) ao longo do tempo.

- Um ponto importante: k_0 é dado, ou seja, a variável capital não pode ser alterada em $t = 0$. Mas o consumo pode, e seu nível inicial c_0 irá determinar a trajetória futura das variável k_t e c_t.
- Assim, o nível de c_0 mostrado na trajetória ótima (ponto A) é tal que se alcance o estado estacionário no longo prazo.
- Consideraremos, assim, valores alternativos de c_0 e mostraremos que eles levam a trajetórias não ótimas.
- Para explicar a dinâmica, consideraremos $k_0 < k^*$.

- Suponha c_0 na região acima da curva $\dot{k}_t = 0$ (ponto B, por exemplo). Nessa região, o consumo é crescente e o capital é decrescente; o capital vai para zero ao longo do tempo.

  - O mesmo vale para c_0 exatamente sobre o curva $\dot{k}_t = 0$ (ponto C)
  - Considere agora c_0 um pouco abaixo dos locus $\dot{k}_t = 0$ (ponto D). Nessa região, consumo e capital crescem ao longo do tempo. Como o ponto inicial é próximo ao locus, a trajetória eventualmente cruza essa curva, e passa a ser regida novamente pela dinâmica da região acima de $\dot{k}_t = 0$, em que o consumo aumenta e o capital declina no tempo.
  - Isso será válido para qualquer ponto iniciando acima do ponto A: teremos uma fase em que consumo e capital crescem, mas a trajetória acaba cruzando o locus $\dot{k}_t = 0$ e entramos em uma dinâmica de capital desacumulação de capital.
  - A única trajetória que leva a economia para o estado estacionário é aquela que inicia no ponto A.

- Mostraremos que essas trajetórias iniciando acima do ponto A não são ótimas. Primeiro mostraremos que, nessas trajetórias, o capital será nulo em um ponto finito no tempo $T > 0$. Isso implica que, para $t > T$, $k_t = y_t = c_t = 0$. Para ver isso, diferencie novamente no tempo a equação (26):

$$\ddot{k}_t = [f'(k_t) - (\delta + n)]\dot{k}_t - \dot{c}_t$$

  - Note que essas trajetórias estão com capital sempre abaixo da regra de ouro, de modo que ao longo delas $f'(k_t) - (\delta + n) > 0$. Quando alcançam a região acima do locus $\dot{k}_t = 0$, passam a apresentar capital decrescente e consumo crescente, ou seja, $\dot{k}_t < 0$ e $\dot{c}_t < 0$. Isso implica que, quando atingem essa região, tais trajetórias apresentam $\ddot{k}_t < 0$, ou seja, o capital é decrescente a taxas crescentes (faça o gráfico de k_t contra o tempo, sendo a primeira e segunda derivadas negativas para se convencer). Em outras palavras, o capital se extingue em um ponto finito no tempo, e passa a ser nulo a partir daí.

– Agora mostraremos que a equação de Euler é violada nessas condições, o que implica que tais trajetórias não podem ser ótimas. Reproduzindo equação (25), avaliada no instante T:

$$\dot{c}_T = c_T \sigma(c_T)[f'(k_T) - (\delta + n + \rho)]$$

o consumo segue trajetória crescente antes de T e, em T, cai para zero de forma descontínua. Isso implica que $\dot{c}_T = -\infty$. Mas o lado direito acima não pode ser negativo em T, pois $f'(0) = \infty$. Portanto, nessas trajetórias a equação de Euler não é satisfeita T, de modo que elas não podem ser ótimas.

– Descartamos, assim, todas as trajetórias iniciando acima do ponto A.

- E trajetórias começando abaixo do ponto A? Considere por exemplo uma trajetória começando no ponto F. Inicialmente capital e consumo crescem, porém como o consumo inicial não é alto o suficiente, a trajetória não alcança o estado estacionário e acaba cruzando para a região em que o capital aumenta e o consumo decresce. Converge para o ponto X no longo prazo, onde o capital é igual a $\overline{k}$ e o consumo vai para zero.

  Trajetórias desse tipo não são ótimas pois violam a condição de transversalidade. Considere o limite, com $k \to \overline{k}$:

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t} u'(c_t) k_t = \overline{k} \lim_{t\to\infty} e^{-\rho t} u'(c_t)$$

  Como $c_t \to 0$, então $u'(c_t) \to \infty$. Dado que $e^{-\rho t} \to 0$ quando $t \to \infty$, o limite acima só será igual a zero se a utilidade marginal do consumo for para infinito a uma taxa mais lenta que ρ (que é a taxa de decrescimento de $e^{-\rho t}$). Para calcular a taxa de crescimento de $u'(c_t)$ quando c_t vai para zero, considere a equação de Euler:

$$\left[-\frac{u''(c_t)}{u'(c_t)}\right] \dot{c}_t = f'(k_t) - (\delta + n + \rho)$$

  Note que a taxa de crescimento da utilidade marginal é:

$$\frac{d \ln u'(c_t)}{dt} = \frac{u''(c_t)}{u'(c_t)} \dot{c}_t$$

Portanto:
$$\frac{d\ln u'(c_t)}{dt} = \rho - [f'(k_t) - (\delta + n)]$$
Como, ao longo dessas trajetórias, $k_t \to \overline{k} > k_g$, então $f'(k_t) \to f'(\overline{k}) < \delta + n$. Portanto, no limite, o termo entre colchetes acima é negativo, de modo que:
$$\frac{d\ln u'(c_t)}{dt} \to \rho - [f'(\overline{k}) - (\delta + n)] > \rho$$
Portanto, ao longo dessas trajetórias, a utilidade marginal do consumo crescerá a uma taxa maior do que ρ no longo prazo, de modo que o limite abaixo não será igual a zero.
$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t} u'(c_t) k_t = \overline{k} \lim_{t\to\infty} e^{-\rho t} u'(c_t) \neq 0$$
violando, assim, a condição de transversalidade.

Exercício: *Refaça a análise acima, considerando $k_0 > k^*$.*

6 Linearização

- Faremos agora uma aproximação linear do sistema dinâmico em torno do estado estacionário
  - Isso permite encontrar analiticamente a trajetória ótima aproximada
- Considere novamente o sistema dinâmico em c e k:
$$\begin{aligned} \dot{c}_t &= c_t\sigma(c_t)[f'(k_t) - (\delta + n + \rho)] \\ \dot{k}_t &= f(k_t) - c_t - (\delta + n)k_t \end{aligned}$$
- Realizaremos uma aproximação de Taylor de primeira ordem (linear) no sistema acima, em torno dos valores de estado estacionário k^* e c^*
- Para a primeira equação temos:
$$\begin{aligned} \dot{c}_t \approx\ & c^*\sigma(c^*)[f'(k^*) - (\delta + n + \rho)] \\ & + [\sigma(c^*) + c^*\sigma'(c^*)]\{f'(k^*) - (\delta + n + \rho)\}(c_t - c^*) \\ & + c^*\sigma(c^*)f''(k^*)(k_t - k^*) \end{aligned}$$
de (23) segue que $f'(k^*) = \delta + n + \rho$, o que implica que os dois primeiros termos do lado direito acima são nulos. Logo:
$$\dot{c}_t \approx c^*\sigma(c^*)f''(k^*)(k_t - k^*)$$

- Linearizando agora a segunda equação do sistema:

$$\dot{k}_t \approx [f(k^*) - c^* - (\delta + n)k^*] - (c_t - c^*) + [f'(k^*) - (\delta + n)](k_t - k^*)$$

em que o primeiro termo do lado direito é nulo por (24) e $f'(k^*) - (\delta + n) = \rho$ por (23). Portanto:

$$\dot{k}_t \approx -(c_t - c^*) + \rho(k_t - k^*)$$

- O sistema dinâmico linearizando em torno do estado estacionário é então dado pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} \dot{c}_t &= c^*\sigma(c^*)f''(k^*)(k_t - k^*) \\ \dot{k}_t &= -(c_t - c^*) + \rho(k_t - k^*) \end{aligned}$$

- Reescrevendo na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{c}_t \\ \dot{k}_t \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & c^*\sigma(c^*)f''(k^*) \\ -1 & \rho \end{bmatrix}}_{\equiv B} \begin{bmatrix} c_t - c^* \\ k_t - k^* \end{bmatrix}$$

- A solução da trajetória ótima (para o capital) é dada por:

$$k_t = A_0 + A_1 e^{\lambda_1 t} + A_1 e^{\lambda_2 t} \tag{27}$$

em que λ_1 e λ_2 são os autovalores associados à matriz B, e A_0, A_1 e A_2 são constantes a serem determinadas.

- Os autovalores λ_1 e λ_2 são encontrados a partir da seguinte equação:

$$\det(B - \lambda I) = 0$$

ou:

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & c^*\sigma(c^*)f''(k^*) \\ -1 & \rho - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} -\lambda(\rho - \lambda) + c^*\sigma(c^*)f''(k^*) &= 0 \\ \lambda^2 - \rho\lambda - M &= 0 \end{aligned} \tag{28}$$

em que:

$$M = -c^*\sigma(c^*)f''(k^*) > 0, \text{ pois } f''(k^*) < 0$$

- A solução da equação (28) é:

$$\lambda = \frac{\rho \pm \sqrt{\rho^2 + 4M}}{2}$$

Os autovalores são então:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{\rho + \sqrt{\rho^2 + 4M}}{2} > 0 \\
\lambda_2 &= \frac{\rho - \sqrt{\rho^2 + 4M}}{2} < 0
\end{aligned}$$

em que λ_2 é negativo pois $\sqrt{\rho^2 + 4M} > \sqrt{\rho^2} = \rho$.

- Falta determinar os coeficientes A_0, A_1 e A_2 em (27). Note que, como $\lambda_1 > 0$, então A_1 terá que ser igual a zero:

  - Se $A_1 < 0$, então $k_t \to -\infty$ quando $t \to \infty$. Isso corresponde às trajetórias em que o consumo cresce e o capital decresce no diagrama de fases (iniciando acima do ponto A). Como essas trajetórias não são ótimas, A_1 não pode ser negativo.
  - Se $A_1 > 0$, então $k_t \to +\infty$ quando $t \to \infty$. Isso corresponde às trajetórias em que o capital cresce e o consumo decresce no diagrama de fases (iniciando abaixo do ponto A). Como essas trajetórias não são ótimas, A_1 não pode ser positivo.
  - Logo, a única situação que é consistente com um estado estacionário no longo prazo é $A_1 = 0$.

- Assim resta determinar os coeficientes A_0 e A_2. Para isso usaremos duas condições:

  - A condição inicial $k_t = k_0$ em $t = 0$, a qual implica que:

$$k_0 = A_0 + A_2 e^{0.\lambda_2} = A_0 + A_2$$

  - A condição final $k_t \to k^*$ quando $t \to \infty$, a qual implica que:

$$k^* = \lim_{t\to\infty} k_t = A_0 + A_2 \lim_{t\to\infty} e^{\lambda_2 t} = A_0, \text{ pois } \lambda_2 < 0$$

  - As duas equações acima implicam que:

$$\begin{aligned}
A_0 &= k^* \\
A_2 &= -(k^* - k_0)
\end{aligned}$$

- A trajetória ótima do capital (em torno do estado estacionário) é então dada por:

$$k_t = k^* - (k^* - k_0)e^{\lambda_2 t}$$

em que:

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \frac{\rho - \sqrt{\rho^2 + 4M}}{2} \\ M &= -c^* \sigma(c^*) f''(k^*) \end{aligned}$$

- A velocidade de convergência é dada por $|\lambda_2|$:
  - Quanto maior $|\lambda_2|$, mais rápido $e^{\lambda_2 t}$ converge para zero, e k_t converge para k^*.
  - Reescrevendo, supondo preferências do tipo CRRA (isto é, $\sigma(c^*) = 1/\gamma$):

$$|\lambda_2| = \frac{\sqrt{\rho^2 + \frac{4c^*|f''(k^*)|}{\gamma}} - \rho}{2}$$

- Note que, quanto maior o parâmetro γ (ou seja, menor a elasticidade de substituição intertemporal), menor a velocidade de convergência.
  - Se γ é elevado, a família representativa é muito intolerante a mudar consumo ao longo da vida
  - Consequentemente, a economia convergirá de maneira mais lenta para o estado estacionário

7 Descentralização

- Até agora discutimos a solução do modelo de forma centralizada, isto é, o planejador central decide diretamente as trajetórias de consumo e investimento de modo a maximizar a utilidade do agente representativo, dado que as alocações são factíveis em cada ponto no tempo $t \geq 0$ – em outras palavras, respeitando a restrição de recursos.
- Agora realizaremos a solução descentralizada do modelo:
  - Decisões de consumo e poupança são tomadas pelas famílias, com base em preços.
  - Decisões de produção são tomadas por firmas, também com base em preços.

- As famílias são donas dos fatores de produção (capital e trabalho), e prestam serviços desses fatores às firmas.
- Equilíbrio competitivo: cada indivíduo realiza sua decisão, tomando preços como dados; em equilíbrio, as decisões de firmas e famílias são consistentes (isto é, os mercados estão em equilíbrio em todo o tempo $t \geq 0$).

- Em cada ponto do tempo t, há 4 mercados abertos:
  - Mercado de produto: ofertado pelas firmas, e demandado pelas famílias para ser utilizado como consumo ou investimento. O preço do produto final é normalizado em 1 – trata-se do numerário dessa economia.
  - Mercado de trabalho: serviços de trabalho são ofertados pelas famílias, e contratados pelas firmas. O preço desse serviço é o salário w_t.
  - Mercado de capital: famílias alugam seu capital para firmas, que utilizam no processo de produção. O preço desse serviço é a taxa de aluguel do capital r_t.
  - Mercado de crédito: famílias podem emprestar ou tomar emprestado entre si à taxa de juros R_t.

7.1 Restrição orçamentária e condição de *Non-Ponzi game*

- Ao contrário do problema do planejador central, as famílias não se defrontam com a restrição de recursos da economia, mas sim como a restrição orçamentária. Em t, essa restrição é dada por:

$$C_t + (\dot{K}_t + \delta K_t) + \dot{B}_t = w_t N_t + r_t K_t + R_t B_t$$

em que B_t é o estoque de ativos financeiros da família (se negativo, trata-se de dívida). O lado direito são os recursos recebidos pela família em t, advindos de serviços de trabalho ($w_t N_t$), serviços de capital ($r_t K_t$) e juros recebidos sobre ativos $R_t B_t$ (juros pagos se $B_t < 0$). O lado esquerdo indica que esses recursos podem ser divididos entre consumo e poupança, sendo que essa última pode ser feita em investimento em capital físico ($I_t = \dot{K}_t + \delta K_t$) ou na aquisição de mais ativos ativos financeiros ($\dot{B}_t$).

- Em termos per capita (dividindo os dois lados acima por N_t):

$$c_t + \frac{\dot{K}_t}{N_t} + \delta k_t + \frac{\dot{B}_t}{N_t} = w_t + r_t k_t + R_t b_t$$

em que $b_t \equiv B_t/N_t$. De (6), temos que $\dot{K}_t/N_t = \dot{k}_t + nk_t$. Analogamente, $\dot{B}_t/N_t = \dot{b}_t + nb_t$. Portanto:

$$c_t + \dot{k}_t + \dot{b}_t = w_t + (r_t - \delta - n)k_t + (R_t - n)b_t \tag{29}$$

- Note que, se $r_t - \delta > R_t$, então o retorno do capital seria maior que o do ativo financeiro. Haveria oportunidades infinitas de arbitragem: os agentes teriam incentivo a se endividar sem limites, para investir em capital e aumentar suas possibilidades de consumo. Entretanto, os recursos da economia são limitados, indicando que essa situação não pode ser um equilíbrio.

  Analogamente, se $r_t - \delta < R_t$, o agente teria incentivo a colocar toda a sua riqueza no ativo financeiro – o capital seria nulo. Mas nesse caso a produtividade marginal do capital seria infinita, assim como o próprio retorno de investir no capital. Essa situação também não é um equilíbrio.

  Logo a única configuração consistente com equilíbrio é tal que os retornos dos dois ativos se igualem:

$$R_t = r_t - \delta$$

  O agente represenativo está, portanto, indiferente em relação às diferentes formas de alocar sua riqueza entre os dois ativos (como eles têm o mesmo retorno, são substitutos perfeitos). Importa apenas o estoque total de ativos (per capita), dado por:

$$a_t = b_t + k_t \tag{30}$$

  Assim, a restrição orçamentária (29) pode ser escrita da seguinte forma:

$$c_t + \dot{a}_t = w_t + (R_t - n)a_t \tag{31}$$

- A restrição acima, entretanto, não previne esquemas de Ponzi:

  - Nesses esquemas, o indivíduo pode aumentar sua dívida indefinidamente para elevar o consumo: em um dado período toma dívida tanto para saldar os juros da dívida atual, como para elevar seu consumo; no período seguinte, toma uma quantidade ainda maior de dívida para pagar os juros (que agora cresceram), e expandir novamente seu consumo.
  - Esses esquemas não violam a restrição (31) em nenhum ponto no tempo.
  - Mas eles não são factíveis, pois não há recursos suficientes na economia para sustentar essa elevação sem limite no consumo.

– É necessário impor uma restrição adicional sobre as escolhas do agente representativo, de modo a prevenir esquemas de Ponzi.

- Multiplique os dois lados da equação (31) por $\exp\{-\int_0^t (R_s - n)ds\}$.

$$c_t e^{-\int_0^t (R_s-n)ds} + [\dot{a}_t - (R_t - n)a_t]e^{-\int_0^t (R_s-n)ds} = w_t e^{-\int_0^t (R_s-n)ds}$$

isso faz com que os fluxos em t sejam trazidos a valor presente (para o período $t = 0$). A integral no expoente permite que a taxa de juros seja variável. Integrando os termos acima entre 0 e infinito, podemos calcular o valor presente descontado de todos os fluxos ao longo da vida do agente:

$$\int_0^\infty c_t e^{-\int_0^t (R_s-n)ds} dt + \int_0^\infty [\dot{a}_t - (R_t - n)a_t]e^{-\int_0^t (R_s-n)ds} dt = \int_0^\infty w_t e^{-\int_0^t (R_s-n)ds} dt \quad (32)$$

- Note que:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\{a_t e^{-\int_0^t (R_s-n)ds}\right\} &= \dot{a}_t e^{-\int_0^t (R_s-n)ds} + a_t e^{-\int_0^t (R_s-n)ds}(-1)(R_t - n) \\ &= [\dot{a}_t - (R_t - n)]e^{-\int_0^t (R_s-n)ds}\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty [\dot{a}_t - (R_t - n)a_t]e^{-\int_0^t (R_s-n)ds} dt &= \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left\{a_t e^{-\int_0^t (R_s-n)ds}\right\} dt \\ &= a_t e^{-\int_0^t (R_s-n)ds}\Big|_{t=0}^{\infty} \\ &= \lim_{t\to\infty} a_t e^{-\int_0^t (R_s-n)ds} - a_0 \quad (33)\end{aligned}$$

- Substituindo (33) em (32):

$$\int_0^\infty c_t e^{-\int_0^t (R_s-n)ds} dt = a_0 + \int_0^\infty w_t e^{-\int_0^t (R_s-n)ds} dt - \lim_{t\to\infty} a_t e^{-\int_0^t (R_s-n)ds} \quad (34)$$

No lado direito acima, os dois primeiros termos são a riqueza do indivíduo ao longo da vida, que advém dos ativos iniciais (primeiro termo, a_0) e do valor presente descontado da renda do trabalho (segundo termo). Do lado esquerdo temos o valor presente do consumo, indicando como o indivíduo pode "gastar" sua riqueza, alocando-a ao longo dos diferentes períodos de sua vida. Mas o termo limite no lado direito, se fosse negativo, faria com que o indivíduo pudesse expandir o valor presente do seu consumo para além de sua riqueza. Isso ocorre nos esquemas de Ponzi. Dessa forma, para prevenir esses esquemas, fazemos a hipótese de que o termo limite seja não negativo. Trata-se da condição de Non-Ponzi Game (NPG):

$$\lim_{t\to\infty} a_t e^{-\int_0^t (R_s - n)ds} \geq 0 \tag{NPG}$$

- Obviamente o indivíduo representativo somente escolherá caminhos de consumo em a expressão acima vale como igualdade
  - Se o limite fosse estritamente positivo, reduzi-lo aumentaria os recursos disponível para consumo ao longo da vida, possibilitando um aumento na utilidade.
  - Nesse caso, com o limite igual a zero, a equação (34) torna-se:

    $$\int_0^\infty c_t e^{-\int_0^t (R_s-n)ds} dt = a_0 + \int_0^\infty w_t e^{-\int_0^t (R_s-n)ds} dt$$

    Esta é a **restrição orçamentária intertemporal**, que nos diz que o valor presente do consumo ao longo da vida do agente deve ser igual ao valor de sua riqueza. Essa última é composta pelos ativos em $t = 0$ e pelo valor da força de trabalho do agente (dada pelo valor presente da renda do trabalho ao longo da vida).

7.2 O problema da família representativa

- A família escolhe as trajetórias de consumo e ativos – $\{c_t\}_{t\in[0,\infty)}$ e $\{a_t\}_{t\in(0,\infty)}$ – de modo a maximizar sua utilidade ao longo da vida tomando como dados:
  - A restrição orçamentária (31) em todos os períodos $t \geq 0$
  - O estoque inicial de ativos a_0
  - A sequência de preços $\{w_t, r_t, R_t\}_{t\in[0,\infty)}$
  - A restrição de NPG
- Cada família é pequena o suficiente para não afetar preços. Entretanto, toma decisão com base em preços futuros, de mercados que ainda não estão abertos no presente.
  - Aqui entra a hipótese de **expectativas racionais**: indivíduos entendem como a economia funciona (têm o modelo "na cabeça"), e são capazes de fazer a melhor previsão possível sobre essas variáveis no futuro.

– No caso, como não há incerteza, eles sabem exatamente como serão esses preços no futuro

- O problema da família representativa é portanto:

$$\max U_0 = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} u(c_t) dt$$

sujeito a

$$\dot{a}_t = w_t + (R_t - n)a_t - c_t, \text{ para todo } t \geq 0$$
$$\lim_{t\to\infty} a_t e^{-\int_0^t (R_s - n)ds} \geq 0$$
$$a_0, \{w_t, r_t, R_t\}_{t\in[0,\infty)} \text{ dados}$$

Lembrando que $R_t = r_t - \delta$ em equilíbrio. No problema acima, c é a variável de controle e a é a variável de estado. O Hamiltoniano é dado por:

$$H_t = e^{-\rho t} u(c_t) + \mu_t[w_t + (R_t - n)a_t - c_t]$$

As condições de ótimo são portanto:

$$H_c = 0 \Longrightarrow e^{-\rho t} u(c_t) - \mu_t = 0 \tag{35}$$
$$H_a = -\dot{\mu}_t \Longrightarrow \mu_t(r_t - \delta - n) = -\dot{\mu}_t \tag{36}$$
$$\lim_{t\to\infty} \mu_t a_t = 0 \tag{37}$$

Note que não impomos a condição de NPG no Hamiltoniano. Isso porque, se ela não valesse, a família poderia sempre aumentar seu consumo em dado período t recorrendo a um esquema de Ponzi. Isso implicaria $H_c > 0$ para algum t. Logo, ao impor $H_c = 0$, estamos eliminado a possibilidade desses esquemas e satisfazendo a condição de NPG.

- Da equação (35) segue que:

$$\frac{\dot{\mu}_t}{\mu_t} = -\rho + \frac{u''(c_t)}{u'(c_t)}\dot{c}_t$$

Substituindo em (36):

$$-\frac{\dot{\mu}_t}{\mu_t} = r_t - \delta - n = \rho - \frac{u''(c_t)}{u'(c_t)}\dot{c}_t$$
$$\rho - \frac{u''(c_t)}{u'(c_t)}\dot{c}_t = r_t - (\delta + n) \tag{38}$$

que é a equação de Euler da família representativa. O lado esquerdo tem a mesma interpretação da equação de Euler do planejador central: ele resume o custo marginal de poupar uma unidade adicional, que é dado pelo custo da espera para consumir, e pelo fato de que o consumo se torna variável no tempo por conta disso. Já o lado direito é o benefício marginal, expresso em termos do retorno para a família: ao poupar uma unidade a mais, a família expande seu capital ao longo do tempo, o qual pode ser alugado à firma. O benefício dessa ação é portanto dado pela taxa de aluguel do capital, líquida de depreciação (tanto depreciação física, como advinda do crescimento populacional).

- Substituindo (35) em (37), podemos obter a condição de transversalidade da família representativa:

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t} u(c_t) a_t = 0 \tag{39}$$

que nos diz que o valor dos ativos (em unidades de utilidade do consumo) quando $t \to \infty$, trazido a valor presente, deve ser igual a zero.

7.3 O problema da firma

- Na economia descentralizada, o produto é gerado por firmas, atuando em competição perfeita
  - Todas as firmas são idênticas
  - Contratam capital e trabalho das famílias, de forma a maximizar seus lucros
  - Como há retornos constantes de escala e concorrência perfeita, o lucro das firmas será igual a zero
- Por conta da hipótese de retornos constantes de escala, o número de firmas é irrelevante para o agregado
  - Assim, por simplicidade, suporemos que há apenas uma firma (ou, de maneira equivalente, que há medida 1 de firmas idênticas)
- O problema da firma é estático
  - Ações e resultados passados (quantidade de insumos contratados, produto, lucro etc.) não afetam o lucro corrente
  - Assim, maximizar o lucro ao longo do tempo (em valor presente) é equivalente a maximizar o lucro em cada instante separadamente

- O problema da firma então consiste em escolher as quantidades de capital (K_t^d) e trabalho (N_t^d) a serem contratadas em t, de modo a maximizar seu lucro no próprio período t, tomando como dados os preços dos insumos (r_t e w_t). Em outras palavras:

$$\begin{aligned}&\max_{K_t^d, N_t^d}\{F(K_t^d, N_t^d) - w_t N_t^d - r_t K_t^d\}\\&w_t,\ r_t \text{ dados}\end{aligned}$$

- As condições de primeira ordem implicam:

$$\begin{aligned}F_K(K_t^d, N_t^d) &= r_t\\F_N(K_t^d, N_t^d) &= w_t\end{aligned}$$

em outras palavras, a firma iguala o produto marginal de cada insumo a seu preço.

- Podemos reescrever as condições acima em termos per capita (omita índices de tempo e o sobrescrito d por um momento). Primeiro note que, por causa de retornos constantes de escala:

$$F(K, N) = N.F(K/N, 1) = N.f(K/N)$$

Os produtos marginais são então:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial K} &= Nf'(K/N)\frac{1}{N} = f'(k)\\\frac{\partial F}{\partial N} &= f(K/N) + Nf'(K/N)\left(-\frac{K}{N^2}\right) = f(k) - kf'(k)\end{aligned}$$

- Assim, as condições de ótimo da firma representativa podem ser expressas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}f'(k_t^d) &= r_t &(40)\\f(k_t^d) - k_t^d f'(k_t^d) &= w_t &(41)\end{aligned}$$

em que $k_t^d = K_t^d / N_t^d$.

7.4 Equilíbrio competitivo

- Nessa economia, os mercados estão em equilíbrio em todos os instantes $t \geq 0$.

- O equilíbrio é tal que:

- Dados os preços, todos os agentes estão otimizando (tanto famílias, quanto firmas).
- As decisões de famílias e firmas são consistentes no agregado, isto é, oferta igual a demanda para todos os mercados, e em todo o tempo $t \geq 0$.
- Não confundir estado estacionário com equilíbrio: aqui os mercados estão em equilíbrio em todo t, inclusive quando a economia está transitando para o estado estacionário. Trata-se, portanto, de uma **trajetória de equilíbrio**.

- Um **equilíbrio competitivo** é:

  1. Uma sequência de preços $\{w_t, r_t, R_t\}_{t \in [0,\infty)}$
  2. Uma sequência de alocações $\{c_t, k_t^d\}_{t \in [0,\infty)}^{\infty}$ e $\{k_t, b_t\}_{t \in (0,\infty)}$

  Tais que:

  - Dada a sequência de preços $\{w_t, r_t, R_t\}_{t \in [0,\infty)}$ e os estoques iniciais de ativos $k_0 > 0$ e $b_0 = 0$, as sequências $\{c_t\}_{t \in [0,\infty)}$ e $\{k_t, b_t\}_{t \in (0,\infty)}$ resolvem o problema da família representativa.
  - Dada a sequência de preços $\{w_t, r_t\}_{t \in [0,\infty)}$, a sequência $\{k_t^d\}_{t \in [0,\infty)}^{\infty}$ resolve o problema da firma representativa.
  - Os mercados estão em equilíbrio (*market clearing*) em todo $t \geq 0$. Isto é, para todo $t \geq 0$:

$$k_t = k_t^d \tag{42}$$

$$b_t = 0 \tag{43}$$

$$c_t + \dot{k}_t - (\delta + n)k_t = f(k_t) \tag{44}$$

- Na definição de equilíbrio acima:

  - A equação (42) indica que a oferta de capital por parte das famílias é igual à demanda de capital por parte das firmas.
  - A equação (43) é a condição de equilíbrio no mercado do ativo financeiro. No caso, b_t tem que ser zero porque os agentes são idênticos nessa economia. Se um deles desejasse emprestar recursos, então todos fariam o mesmo, e não haveria ninguém para tomar emprestado. Isso não pode ser um equilíbrio. Analogamente, se um agente quisesse tomar emprestado, então todos

os outros fariam o mesmo, e não haveria ninguém disposto emprestar recursos. Também não é um equilíbrio. Assim, os preços devem ser tais que o agente representativo não esteja disposto a emprestar ou tomar emprestado nessa economia, isto é, $b_t = 0$, para todo $t \geq 0$. Adicionalmente, da equação (30) segue que:

$$a_t = b_t + k_t = k_t \tag{45}$$

- Por fim, a equação (44) é a própria restrição de recursos dessa economia. Ela é também a condição de equilíbrio no mercado de produto, sendo a demanda por parte das famílias (para consumo e investimento) expressa no lado esquerdo da equação, e a oferta por parte das firmas expressa no lado direito.

7.5 Eficiência

- Como a solução de mercado e a solução do planejador central se comparam? Mostraremos que elas coincidem nesse modelo. Trata-se de uma aplicação do Primeiro Teorema do Bem Estar:

  - Dado que não há falhas de mercado (poder de monopólio, externalidades, problemas de informação, mercados ausentes etc.), a solução de mercado será eficiente.

  - A trajetória de equilíbrio é, portanto, idêntica à trajetória que resulta do problema do planejador central.

- Para ver isso, combine a equação de Euler da família representativa (38) e a condição de primeira ordem da firma (40), levando em conta que em equilíbrio $k_t = k_t^d$, para obter:

$$\rho - \frac{u''(c_t)}{u'(c_t)}\dot{c}_t = f'(k_t) - (\delta + n), \text{ para todo } t \geq 0 \tag{46}$$

- Além disso, da condição de transversalidade do problema da família (39), junto com a condição de equilíbrio $a_t = k_t$, temos que:

$$\lim_{t \to \infty} e^{-\rho t} u(c_t) k_t = 0 \tag{47}$$

- Lembrando que, em equilíbrio, a restrição de recursos é válida:

$$\dot{k}_t = f(k_t) - c_t - (\delta + n)k_t, \text{ para todo } t \geq 0 \tag{48}$$

- As equações (46), (48) e (48) coincidem com as equações que caracterizam a solução do problema do planejador central (14), (15) e (16).
  - Logo a trajetória de equilíbrio coincide com a solução do problema do planejador central.
  - O equilíbrio competitivo é eficiente.

Figura 1

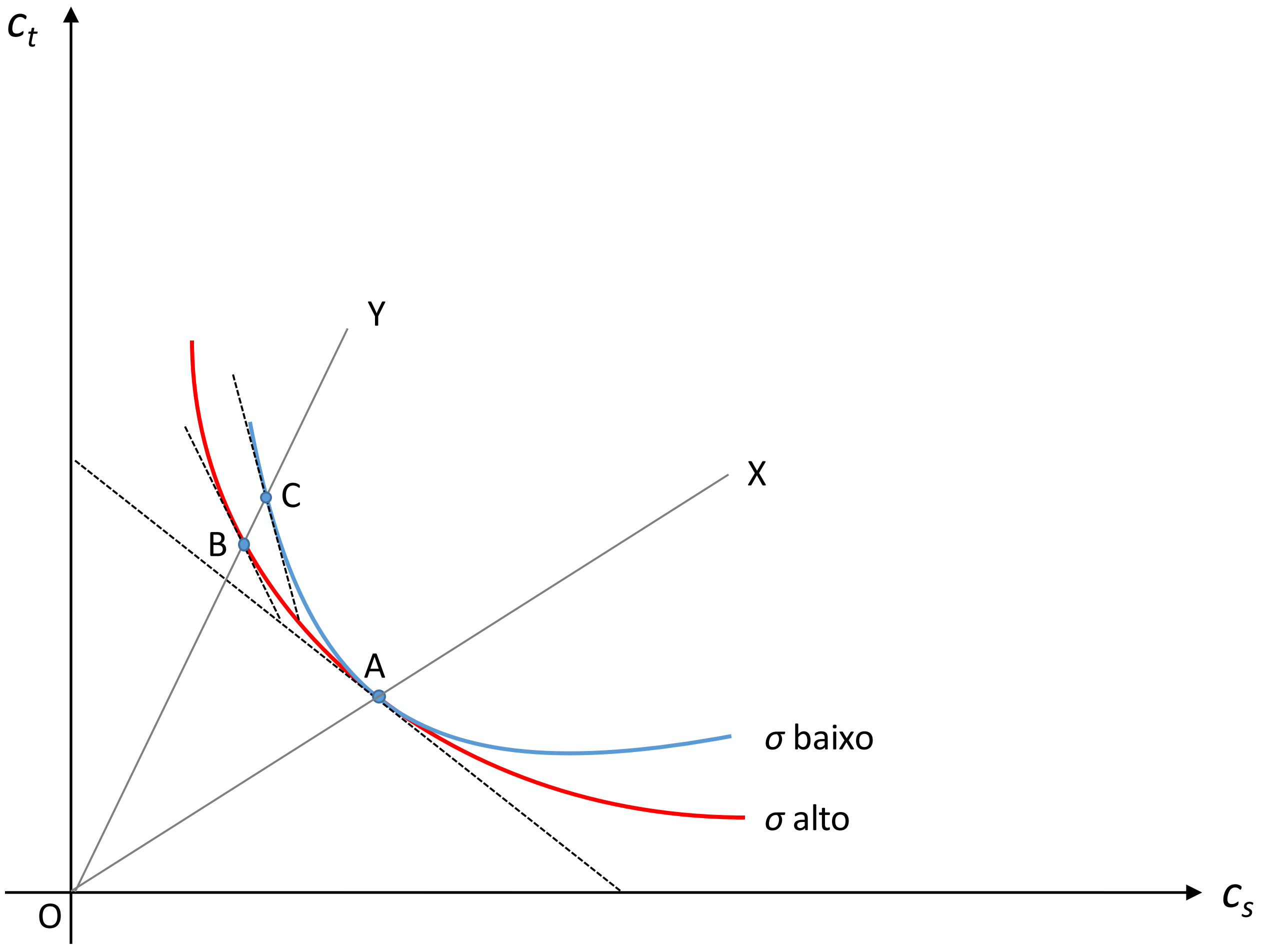

Figura 2

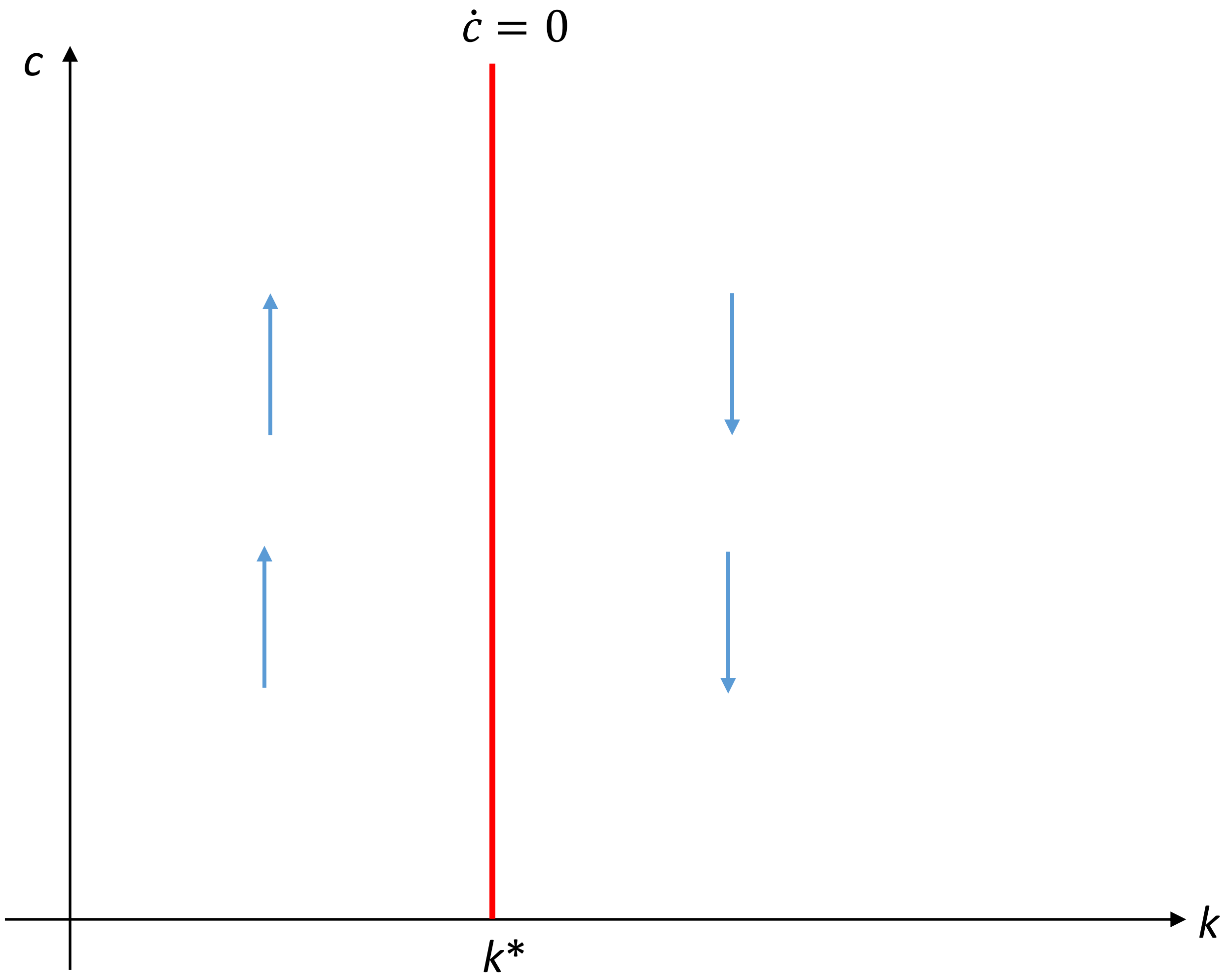

Figura 3

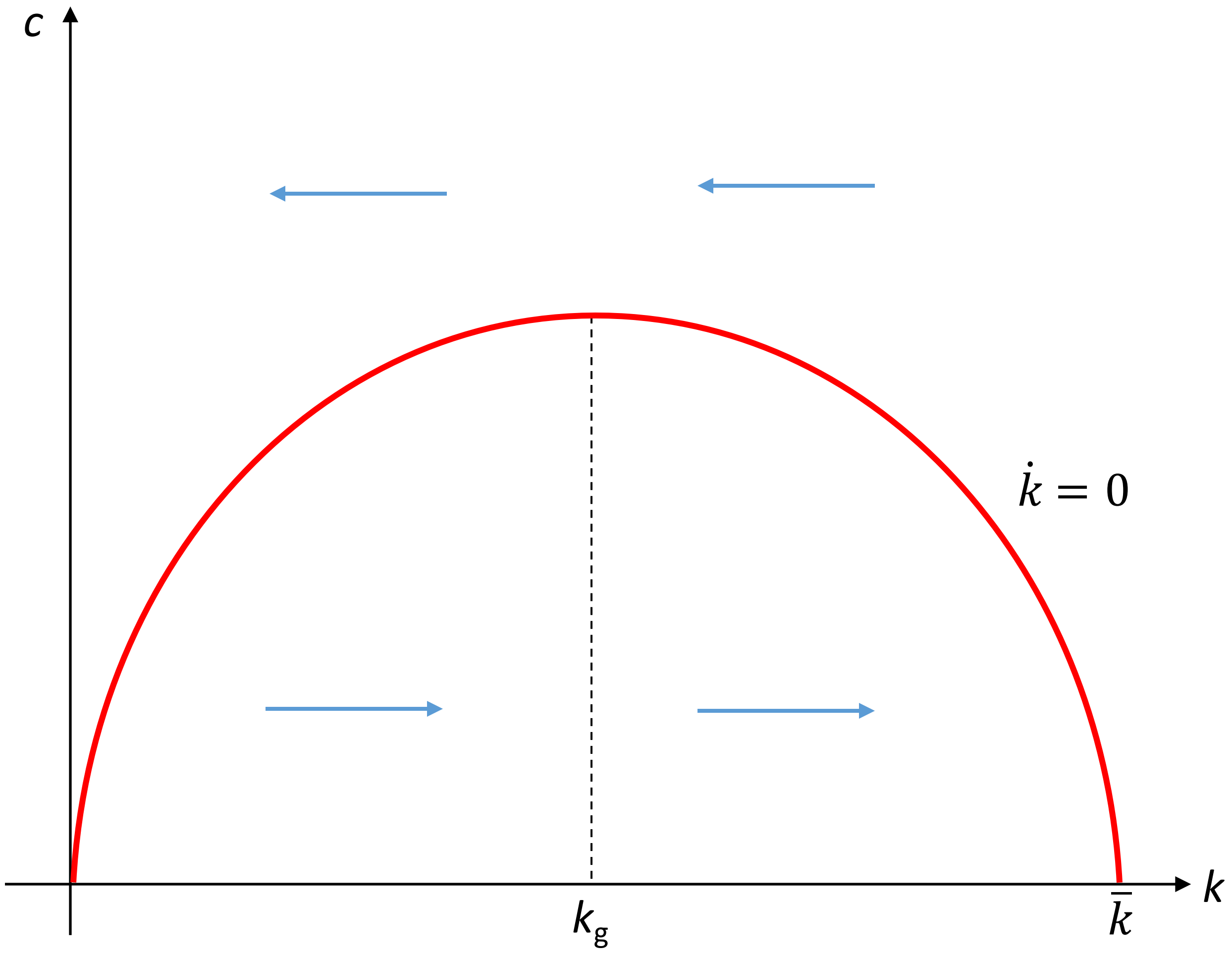

Figura 4

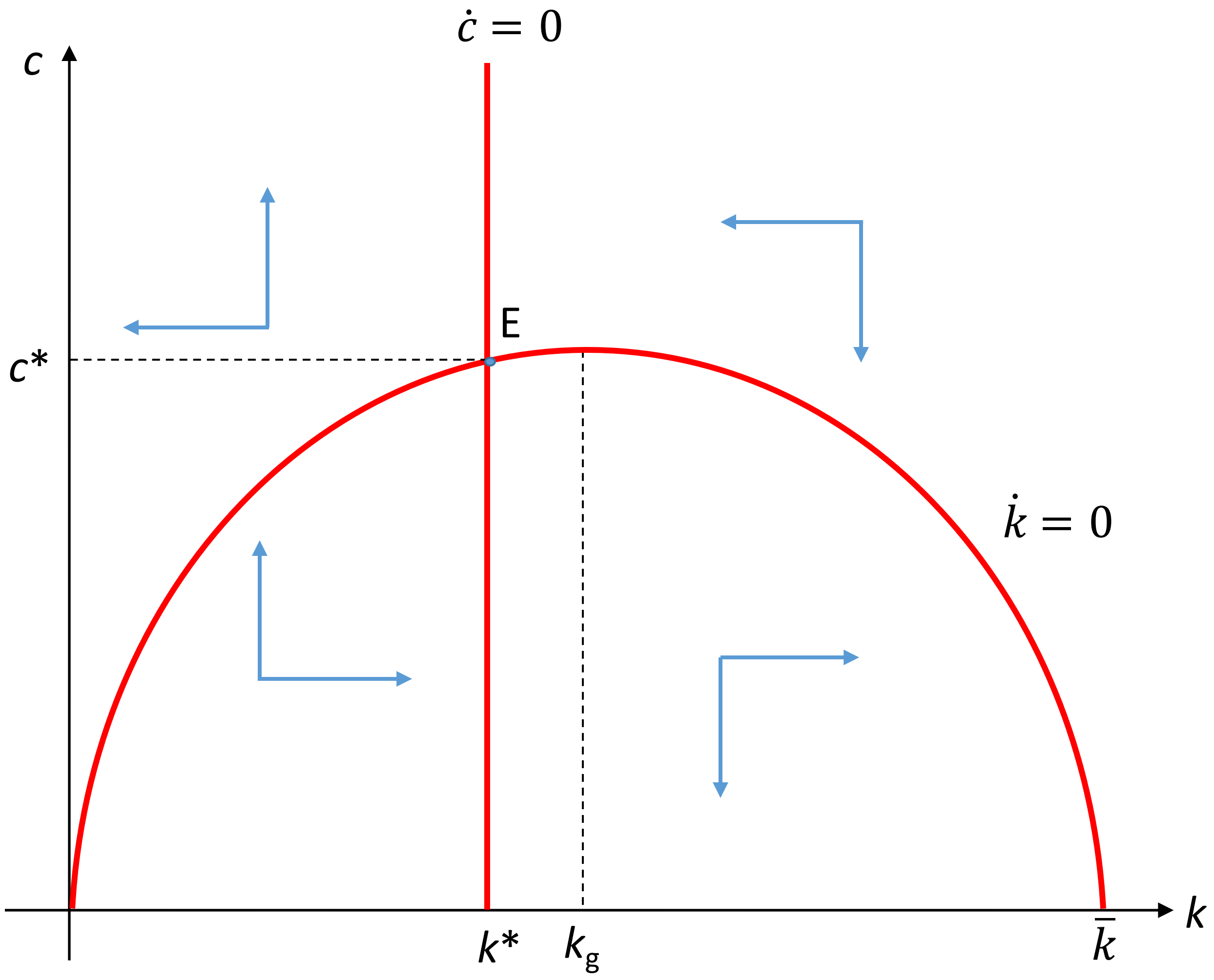

Figura 5