Microeconomia

Parte 10
Escolha sob Incerteza

Prof.: Antonio Carlos Assumpção

Tópicos Discutidos

- Descrição do Risco
- Preferência em Relação ao Risco
- Redução do Risco
- A Demanda por Ativos de Risco
- O Modelo CAPM

Introdução

- Como os agentes econômicos fazem escolhas quando certas variáveis como a renda e os preços são incertas (ou seja, quando existe risco) ?

Descrição do Risco

- Para medir o risco devemos saber:
  - Todas as possibilidades de resultado.
  - A probabilidade com que cada resultado poderá ocorrer.

Descrição do Risco

- **Interpretando a Probabilidade**
  - **Interpretação Objetiva**
    - Baseada na frequência observada de eventos passados
  - **Subjetiva**
    - Baseada na percepção ou experiência, com ou sem uma frequência observada
      - Diferentes informações ou habilidades para processar a mesma informação podem influenciar a probabilidade subjetiva

Descrição do Risco

- **Valor Esperado**
  - A média ponderada dos *payoffs* ou valores de todos os possíveis resultados.
    - As probabilidades de cada resultado são usadas como pesos
    - O Valor Esperado mede a *tendência central*; ou seja, o *payoff* que, na média, deveríamos esperar que viesse a ocorrer.

Descrição do Risco

- **Um Exemplo**
  - Investimentos em exploração petrolífera em águas profundas:
  - Dois resultados são possíveis
    - **Sucesso** – o preço das ações aumenta de $30 para $40
    - **Insucesso** - o preço das ações cai de $30 para $20

Descrição do Risco

- **Um Exemplo**
  - **Probabilidade Objetiva**
    - 100 explorações, 25 sucessos e 75 insucessos
    - Probabilidade (Pr) de sucesso = 1/4 e a probabilidade de insucesso = 3/4

Descrição do Risco

- **Um Exemplo:**
  - **Valor Esperado (VE)**

$$\text{VE} = \Pr(\text{sucesso})(\$40) + \Pr(\text{insucesso})(\$20)$$

$$\text{VE} = 1/4\,(\$40) + 3/4\,(\$20)$$

$$\text{VE} = \$25$$

Descrição do Risco

- Portanto, o valor esperado é escrito como:

$$\boxed{E(X)} = Pr_1 X_1 + Pr_2 X_2 + \ldots + Pr_n\ X_n \rightarrow \sum_{i=1}^{n} Pr_i \left(X_i \right)$$

Valor esperado da Variável X (média ou expectância)

- **Variabilidade**
  - É o grau de diferença entre resultados possíveis em situações incertas.

Descrição do Risco

- **Um Cenário**
  - Suponha que você está escolhendo entre dois empregos de meio período na área de vendas que ofereçam a mesma renda esperada ($1.500)
  - O primeiro baseia-se totalmente em comissões.
  - O segundo é uma posição assalariada.

Descrição do Risco

- Um Cenário
  - Existem dois resultados igualmente possíveis no primeiro emprego: $2.000 por um bom resultado de vendas e $1.000 para um resultado inferior.
  - O segundo paga $1.510 enquanto a empresa continuar a operar (0,99 de probabilidade), sendo que se ela encerrar suas atividades (0,01 de probabilidade) o trabalhador receberia $510 de indenização.

Descrição do Risco

Renda de Empregos em Vendas					
	Resultado 1		Resultado 2		Renda Esperada
	Probabilidade	Renda ($)	Probabilidade	Renda ($)	
Comissão	0,5	2000	0,5	1000	1500
Salário Fixo	0,99	1510	0,01	510	1500

Descrição do Risco

- **Emprego 1:** Renda Esperada

$$E(X_1) = 0,5(\$2000) + 0,5(\$1000) = \$1500$$

- **Emprego 2:** Renda Esperada

$$E(X_2) = 0,99(\$1510) + 0,01(\$510) = \$1500$$

Descrição do Risco

- Equanto os valores esperados são os mesmos, a variabilidade não é.
  - A maior variabilidade de valores esperados sinaliza um grau de risco maior.
- **Desvio**
  - Diferença entre os valores realizados e os valores esperados.

Descrição do Risco

	Desvios do Rendimento Esperado ($)			
	Resultado 1	Desvio	Resultado 2	Desvio
Emprego 1	$2.000	$500	$1.000	-$500
Emprego 2	$1.510	$10	$510	-$990

Descrição do Risco

- **Ajuste para números negativos**

- O **desvio padrão** é a raíz quadrada da média dos quadrados dos desvios associados a cada valor esperado.

$$\sigma = \sqrt{\Pr_1\left[(X_1 - E(X))^2\right] + \Pr_2\left[(X_2 - E(X))^2\right]}$$

Descrição do Risco

Cálculo da Variância ($)						
	Resultado 1	Quadrado do Desvio	Resultado 2	Quadrado do Desvio	Quadrado do Desvio Padrão	Desvio Padrão
Emp. 1	$2.000	$250.000	$1.000	$250.000	$250.000	$500,00
Emp. 2	$1.510	$100	$510	$980.100	$9.900	$99,50

Descrição do Risco

- O desvio padrão dos dois empregos é:

$$\sigma_1 = \sqrt{0,5(\$250.000) + 0,5(\$250.000)}$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\$250.000}$$

$$\sigma_1 = 500 \longrightarrow \boxed{\text{Grande Risco}}$$

$$\sigma_2 = \sqrt{0,99(\$100) + 0,01(\$980.100)}$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\$9.900}$$

$$\sigma_2 = 99,50$$

Descrição do Risco

- O desvio padrão pode ser usado quando existem muitos resultados possíveis ao invés de apenas dois.

Descrição do Risco

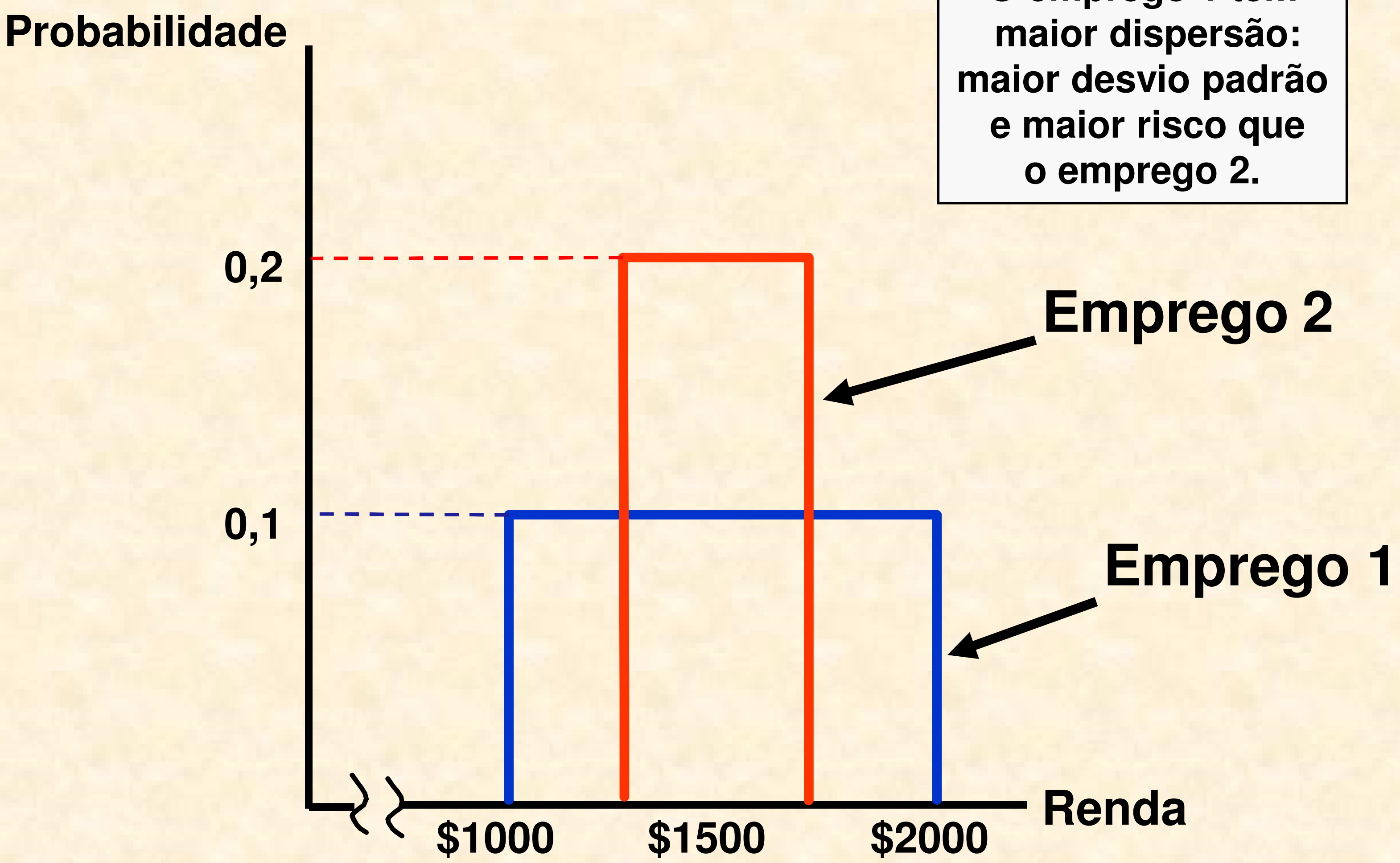
Exemplo

- O emprego 1 é um emprego no qual o rendimento varia entre \$1000 e \$2000 em incrementos de \$100 , sendo todos igualmente prováveis.

- O emprego 2 é um emprego no qual o rendimento varia entre \$1300 e \$1700 em incrementos de \$100 que, também, são todos igualmente prováveis.

Probabilidades dos Resultados de Dois Empregos

O emprego 1 tem maior dispersão: maior desvio padrão e maior risco que o emprego 2.



Descrição do Risco

- **Probabilidades dos Resultados de Dois Empregos**
  - Emprego 1: maior dispersão e desvio padrão
  - Distribuição achatada: todos os resultados são igualmente prováveis

Descrição do Risco

- **Tomada de Decisão**
  - Um indivíduo avesso ao risco escolheria o emprego 2: mesma renda esperada que no emprego 1, com menos risco.
  - Suponha agora que aumentemos em $100 os *payoffs* do emprego 1 de tal modo que o valor esperado passe para $1600.
    - Agora, temos 1.100, 1.200, ...,2.100.

Rendas de Empregos em Vendas (Modificadas ($))

	Resultado 1	Quadrado do Desvio	Resultado 2	Quadrado do Desvio	Renda Esperada	Desvio Padrão
Emp. 1	$2.100	$250.000	$1.100	$250.000	$1.600	$500
Emp. 2	$1.510	$100	$510	$980.100	$1.500	$99,50

$$VE_{Emp1} = \$1.100(0,1) + \$1.200(0,1) + \ldots + \$2.100(0,1) = \$1.600$$

Descrição do Risco

Tomada de Decisão

- **Emprego 1:** renda esperada de $1.600 e um desvio padrão de $500.
- **Emprego 2:** renda esperada de $1.500 e um desvio padrão de $99,50.
- **Qual emprego escolher?**
  - Maior rendimento ou menor risco?

Descrição do Risco

Contenção das Infrações

- Suponha que uma cidade queira impedir o estacionamento em fila dupla.
- A alternativas …...

Descrição do Risco

- **Assumimos:**

  1) Estacionamento em fila dupla faz com que o agente econômico economize $5 em termos de tempo gasto procurando por um lugar para estacionar.

  2) O motorista é neutro em relação ao risco.

  3) O custo de captura do infrator é zero.

Descrição do Risco

- Uma multa de \$5,01 poderia evitar o estacionamento em fila dupla.
  - O benefício de estacionar em fila dupla (\$5) é menor que o custo (\$5,01) determinando um benefício líquido negativo para o infrator.

Descrição do Risco

- O aumento do valor da multa poderia reduzir o número de infrações:
  - Uma multa de $50 com 0,1 de probabilidade de ser pego resulta em uma penalidade esperada de $5.
  - Uma multa de $500 com 0,01 de probabilidade de ser pego resulta em uma penalidade esperada de $5.

Descrição do Risco

- Para reduzir as infrações, a penalidade deve ser mais efetiva, quanto maior a propensão ao risco dos agentes econômicos.

- Uma política que combine multas elevadas e baixa probabilidade de captura do infrator reduziria, provavelmente, os custos de imposição da lei.

Preferências em Relação ao Risco

- **Escolhendo entre opções alternativas de risco**
  - **Assumimos:**
    - Consumo de um bem individual
    - O consumidor conhece todas as probabilidades
    - *Payoffs* medidos em termos de utilidade
      - Lembre-se do conceito de utilidade marginal decrescente.
    - Função de Utilidade dada

Preferências em Relação ao Risco

- Quanto a função utilidade, trata-se de uma função que associa um nível de utilidade a cada valor monetário: $\$ \rightarrow f(U) \rightarrow U$.
- Suponha uma função utilidade, tal que:
  - \$10.000 $\Rightarrow$ 10 unidades de utilidade
  - \$15.000 $\Rightarrow$ 13 unidades de utilidade
  - \$16.000 $\Rightarrow$ 14 unidades de utilidade
  - \$20.000 $\Rightarrow$ 16 unidades de utilidade
  - \$30.000 $\Rightarrow$ 18 unidades de utilidade
  - \$40.000 $\Rightarrow$ 20 unidades de utilidade

Preferências em Relação ao Risco

Exemplo

- Uma pessoa está ganhando \$15.000 e recebe 13 unidades de utilidade do emprego.
- Ela está considerando um novo e mais ariscado emprego.
- Ela tem 50% de chance de aumentar sua renda para \$30.000 e 50% de chance de diminuir sua renda para \$10.000.
- Ela irá avaliar a situação pelo cálculo do valor esperado (utilidade) da renda resultante.

Preferências em Relação ao Risco

- A **utilidade esperada** da nova posição é a soma das utilidades associadas a todos os possíveis resultados, ponderadas pelas probabilidades de que cada resultado (neste caso, a renda) ocorra.

  - Lembre-se que estamos supondo a existência de uma função que associa um nível de utilidade a cada valor monetário.

Preferências em Relação ao Risco

- A utilidade esperada pode ser escrita assim:
  - $E(u) = (1/2)u(\$10.000) + (1/2)u(\$30.000)$

    $= 0,5(10) + 0,5(18) = 14$
  - $E(u)$ do novo emprego é 14, maior que a utilidade corrente de 13 e, portanto, preferida.

Preferências em Relação ao Risco

- Diferentes preferências em relação ao Risco
  - As pessoas podem apresentar *aversão ao risco, neutralidade diante do risco,* ou *amor (propensão) pelo risco.*

Preferências em Relação ao Risco

- Diferentes preferências em relação ao Risco
  - **Aversão ao Risco :** o indivíduo prefere uma renda certa do que uma renda incerta com o mesmo valor esperado (renda esperada).
    - Tal indivíduo possui utilidade marginal decrescente para a renda
    - O uso de seguros demonstra o comportamento avesso ao risco.

Aversão ao Risco

- O Cenário
  - Uma pessoa pode ter um emprego de $20.000 com 100% de probabilidade e recebe um nível de utilidade de 16.
  - A pessoa poderia ter um emprego com 50% de probabilidade de ganhar $30.000 e 50% de probabilidade de ganhar $10.000.

Preferências em Relação ao Risco

Aversão ao Risco

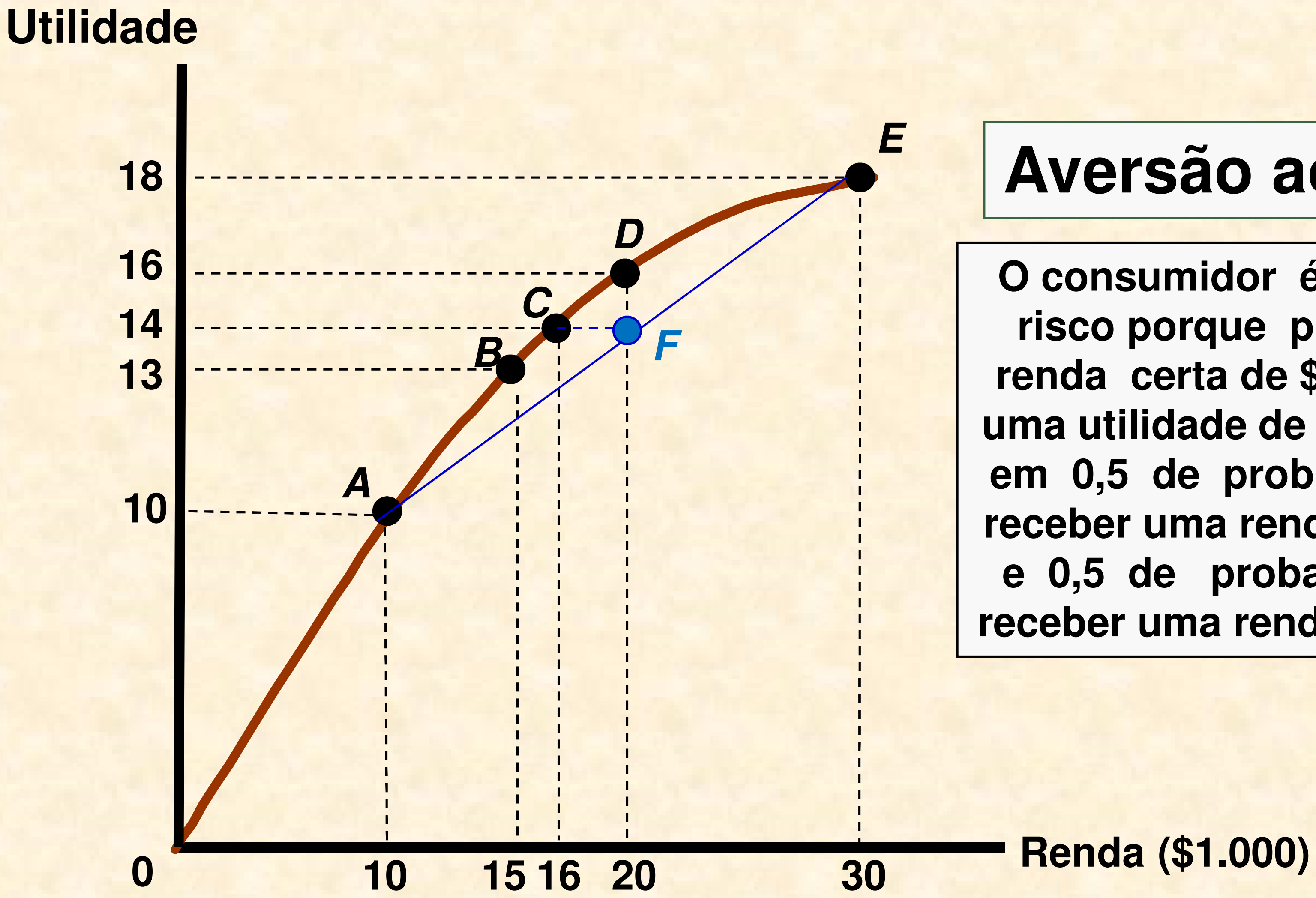
- Renda Esperada
- (0,5)($30.000) + (0,5)($10.000) = $20.000
  - A renda esperada de ambos os empregos é a mesma – a aversão ao risco fará com que o indivíduo escolha o primeiro emprego.

Preferências em Relação ao Risco

Aversão ao Risco

- A utilidade esperada do novo emprego é encontrada da seguinte forma:
  - E(u) = (1/2)u (\$10.000) + (1/2)u(\$30.000)
  - E(u) = (0,5)(10) + (0,5)(18) = 14
    - E(u) do emprego 1 é 16 , que é maior que a E(u) do emprego 2 , que é 14.

Preferências em Relação ao Risco



Aversão ao Risco

O consumidor é avesso ao risco porque prefere uma renda certa de $20.000 (com uma utilidade de 16) a apostar em 0,5 de probabilidade de receber uma renda de $10.000 e 0,5 de probabilidade de receber uma renda de $30.000.

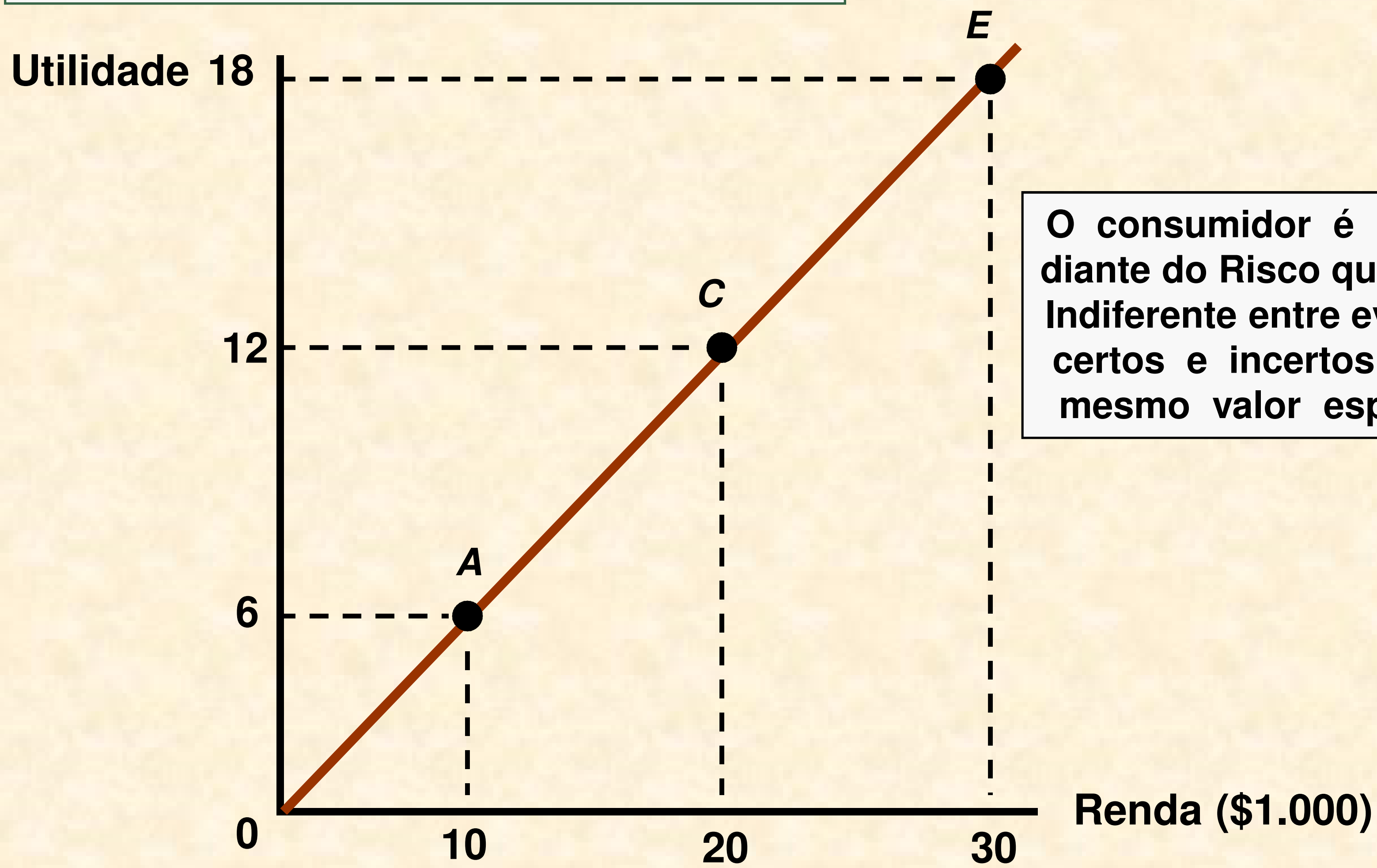
Preferências em Relação ao Risco

Neutralidade diante de Risco

- Uma pessoa que possui **neutralidade diante do risco** não demostra preferência entre uma renda certa e uma renda incerta com o mesmo valor esperado.

Preferências em Relação ao Risco

Neutralidade Diante do Risco

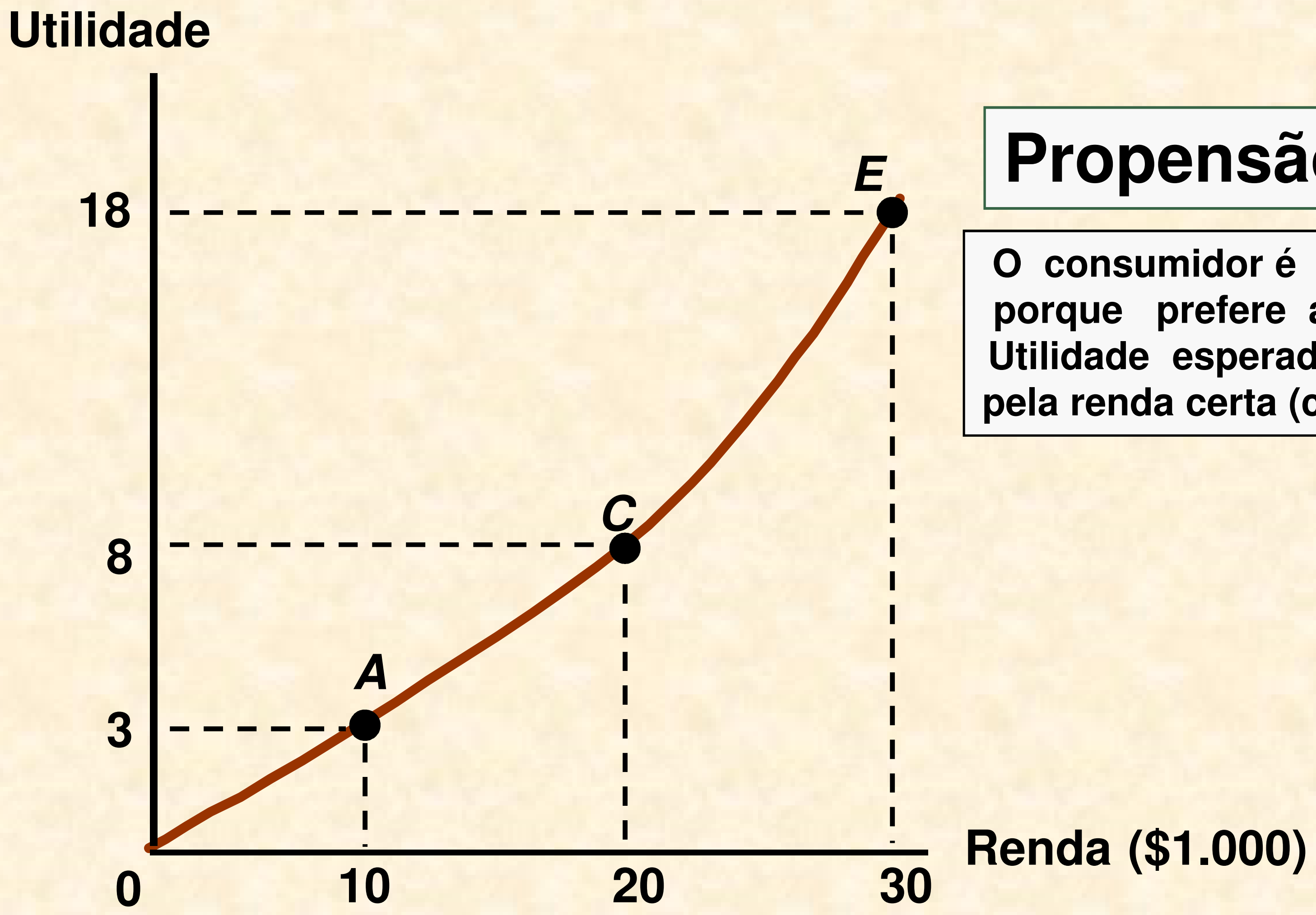


O consumidor é neutro diante do Risco quando é Indiferente entre eventos certos e incertos com o mesmo valor esperado.

Propensão ao Risco

- Uma pessoa possui **propensão ao risco** se demonstra uma preferência em relação a uma renda incerta sobre uma renda certa com o mesmo valor esperado.

Preferências em Relação ao Risco



Propensão ao Risco

O consumidor é propenso ao risco porque prefere apostar (com uma Utilidade esperada de 10,5) a optar pela renda certa (com utilidade de 8).

Prêmio do Risco

- **Prêmio do Risco** é a quantidade de dinheiro que uma pessoa avessa ao risco pagaria para evitá-lo.
- Dito de outra forma, é o montante de renda do qual o indívíduo abriria mão para que se tornassem indiferentes, uma escolha de risco e uma escolha certa.

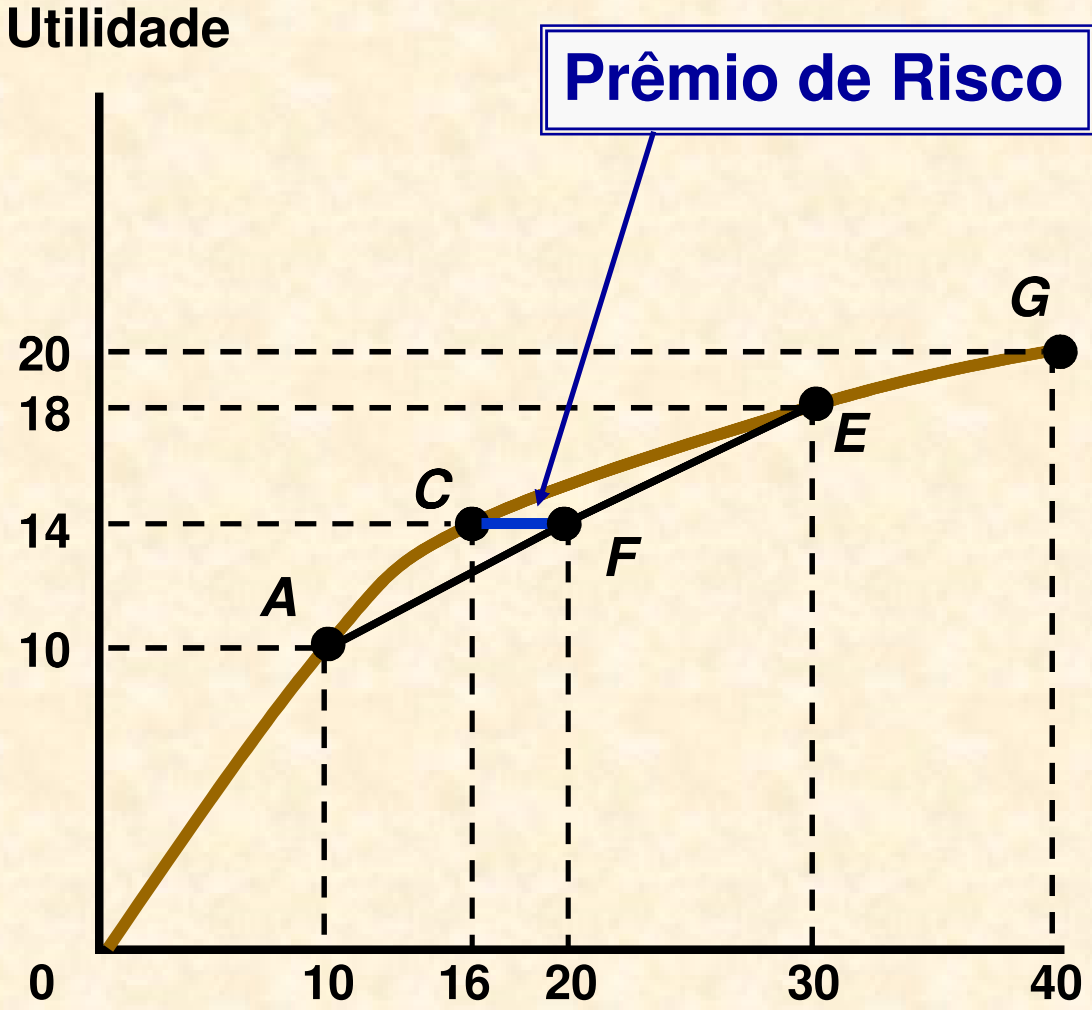
Prêmio do Risco

- **Um Cenário**
  - A pessoa tem 0,5 de probabilidade de ganhar \$30.000 e 0,5 de probabilidade de ganhar \$10.000 (renda esperada = \$20.000).
  - A utilidade esperada desses dois resultados pode ser encontrada:
    - $E(u) = 0,5(18) + 0,5(10) = 14$

Prêmio do Risco

- **Questão**
  - Quanto uma pessoa pagaria para evitar o risco?

Preferências em Relação ao Risco



Prêmio de Risco

Aqui, o prêmio de risco é $4.000 porque uma renda certa de $16.000 (ponto C) dá ao indivíduo a mesma utilidade esperada (14) de uma renda incerta cujo valor esperado é $20.000 (com 0,5 de probabilidade de estar no ponto A e 0,5 de probabilidade de estar no ponto E).

Preferências em Relação ao Risco

- Observações:
  - Indivíduos avessos ao risco exibem uma função utilidade côncava. Para eles, o prêmio de risco será sempre positivo.
  - Indivíduos propensos ao risco exibem uma função utilidade convexa. Para eles o prêmio de risco será sempre negativo.
  - Indivíduos neutros em relação ao risco exibem uma função utilidade linear. Para eles o prêmio de risco será sempre nulo.
  - Obviamente algumas pessoas podem possuir aversão a alguns tipos de riscos e, em relação a outros tipos, agir como se o amassem. É o caso das pessoas que compram seguros de vida e são conservadores na escolha do emprego, mas ainda assim gostam de jogos de azar.

Aversão ao Risco e Renda

- O grau de aversão a riscos demonstrado pelos indivíduos depende da natureza dos riscos envolvidos e de seu nível de renda. Geralmente, pessoas com aversão a riscos preferem uma variabilidade de resultados menor. Logo, a maior variabilidade potencial aumenta o prêmio de risco.

- **Exemplo:**
  - **Um emprego possui 0,5 de probabilidade de pagar $40.000 (com utilidade de 20) e 0,5 de probabilidade de pagar 0 (com utilidade de 0).**

Preferências em Relação ao Risco

Aversão ao Risco e Renda

- **Exemplo:**
  - A renda esperada ainda está em \$20.000, mas a utilidade esperada cai para 10.
  - Utilidade Esperada
    - $0{,}5u(\$) + 0{,}5u(\$40.000) = 0 + 0{,}5(20) = 10$
- Portanto, quanto maior a variabilidade, maior será a soma que um indivíduo estaria disposto a pagar para evitar a situação de risco.

Observação Importante Quanto à Notação

- Até agora não utilizamos o termo "loteria" na nossa análise de escolha envolvendo risco.
- Em geral, define-se uma loteria (L) como um conjunto de planos de consumo contingentes(1), $c_1 < c_2, <...< c_n$, sendo que para o estado de natureza i é associado uma probabilidade de ocorrência π_i , de forma que $\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1.$
- Utiliza-se a notação $L = (c_1, ..., c_n ; \pi_1, ..., \pi_n)$, onde o consumo contingente é o valor monetário da riqueza do indivíduo em cada estado da natureza.

(1) contingente, pois o *payoff* só acontece se certo evento ocorre.

Observação Importante Quanto à Notação

- Por isso, muitas vezes a representação da função utilidade, para dois estados da natureza aparece como

$$\boxed{U(c_1, c_2; \pi_1, \pi_2)}$$

- Preferências sobre loterias são expressas na forma de utilidade esperada. Portanto:

$$\boxed{U(c_1, c_2; \pi_1, \pi_2) = \pi_1 u(c_1) + \pi_2 u(c_2)}$$

  - Função utilidade **de von Neumann-Morgenstern**

Observação Importante Quanto à Notação

- Os conceitos foram os mesmos que utilizamos até aqui. A diferença fica por conta da notação empregada. O exemplo abaixo é esclarecedor.
- Considere a seguinte loteria em que o indivíduo possui uma riqueza inicial de \$40.000. Suponha que ele corre um risco de 25% de perder esse valor. Logo, o valor esperado da loteria é dado por:

$$E(L) = \pi_1 \bullet c_1 + \pi_2 \bullet c_2 = 0,25 \bullet \$0 + 0,75 \bullet \$40.000 = \$30.000$$

- Se $U(W) = \sqrt{W}$

$$E(U) = 0,25 \bullet U(\$0) + 0,75 \bullet U(\$40.000) = 0,75 \bullet \sqrt{\$40.000} = \$150$$

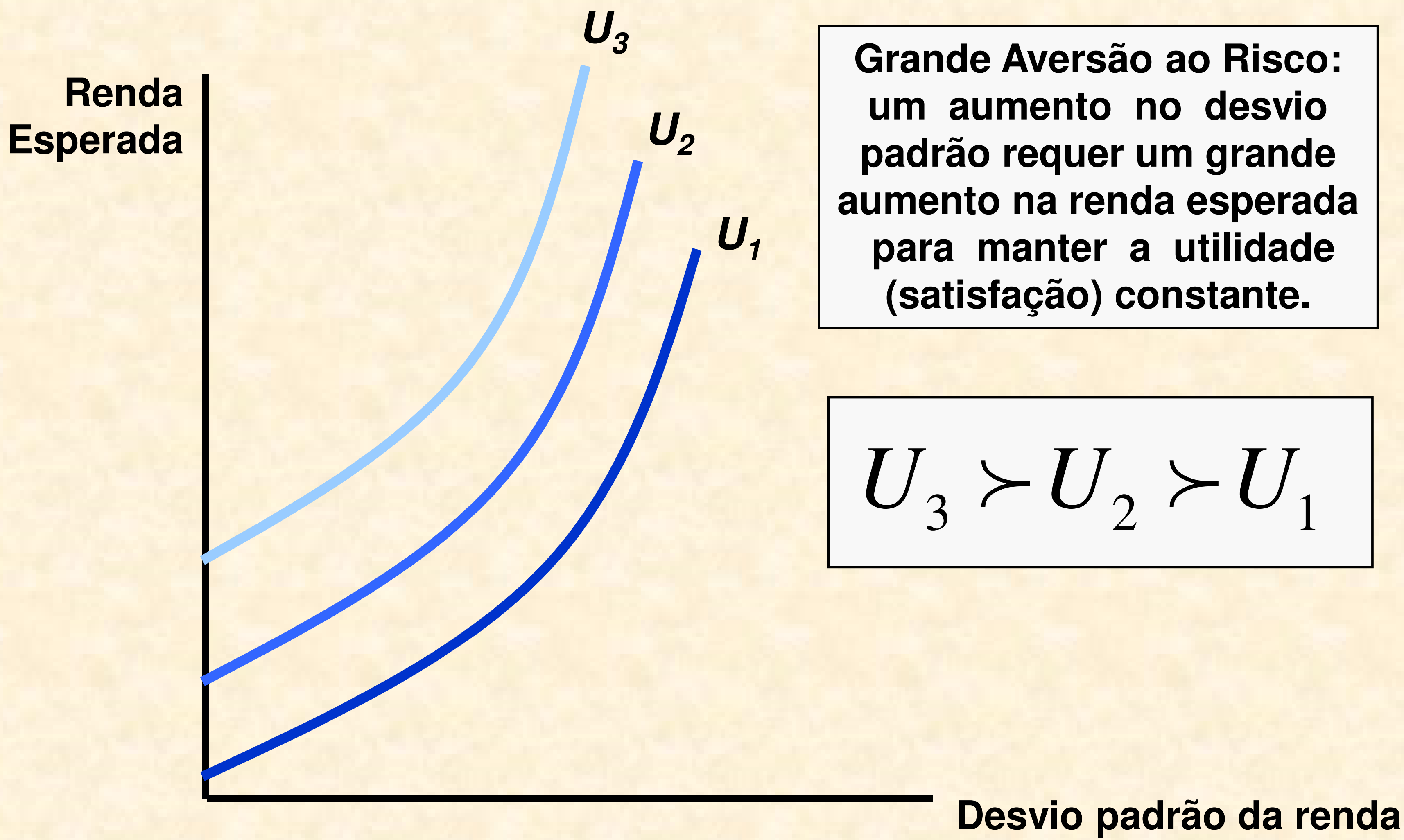
Utilidade em valor monetário

Preferências em Relação ao Risco

Aversão ao Risco e as Curvas de Indiferença

- Nos mostra todas as combinações de renda esperada e desvio padrão (*proxi* para o risco) que proporcionam ao indivíduo o mesmo nível de utilidade ou satisfação.

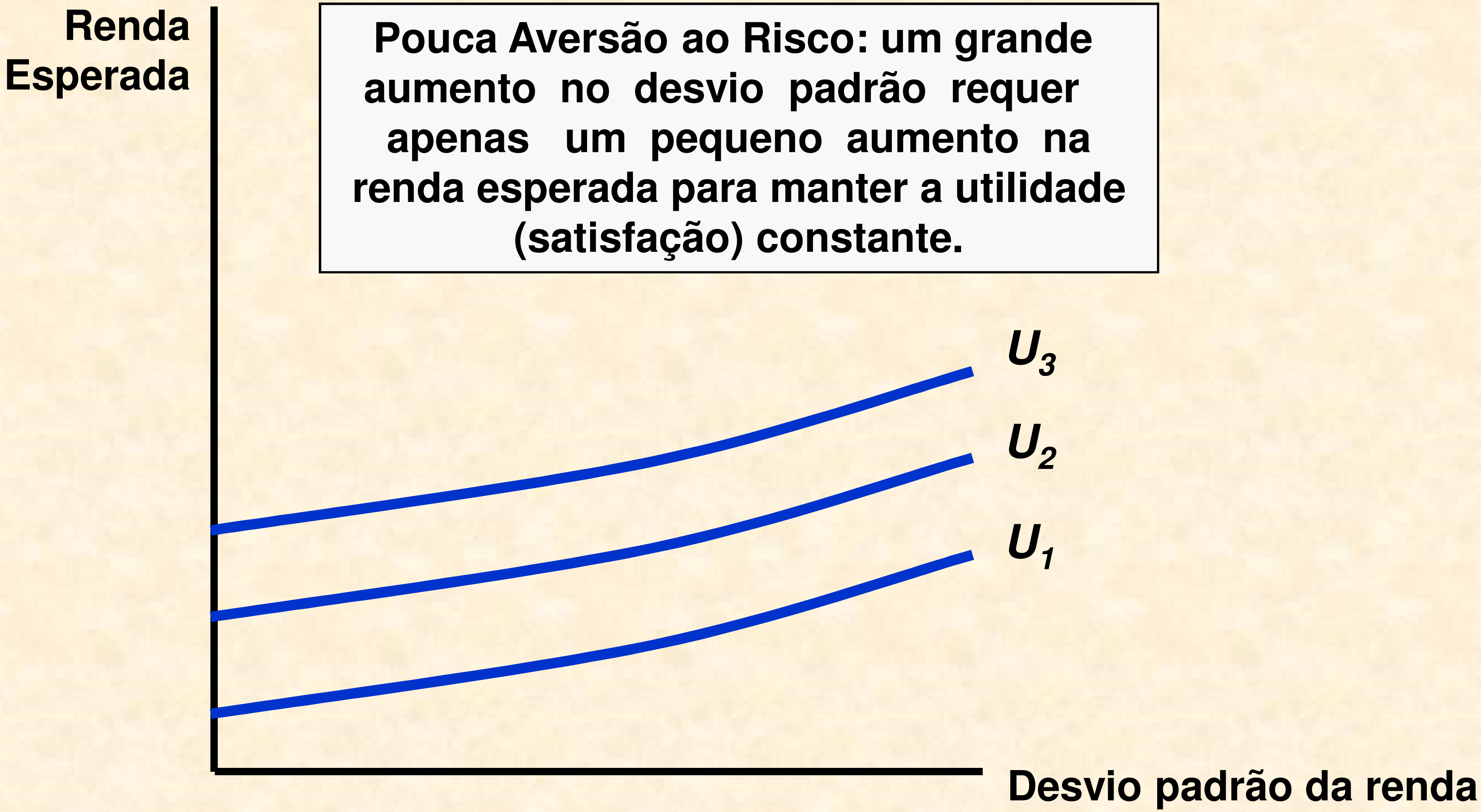
Aversão ao Risco e Curvas de Indiferença



Grande Aversão ao Risco: um aumento no desvio padrão requer um grande aumento na renda esperada para manter a utilidade (satisfação) constante.

$$U_3 \succ U_2 \succ U_1$$

Aversão ao Risco e Curvas de Indiferença



Medidas de Aversão ao Risco

- O agente econômico descrito pelas curvas de indiferença que vimos anteriormente é considerado avesso ao risco, pois a sua função utilidade em relação à riqueza é côncava em relação à origem. Desta forma, à medida que o grau de risco aumenta, o retorno esperado exigido para manter a utilidade constante deve aumentar mais que proporcionalmente ao aumento do risco.

- Portanto, podemos diferenciar os indivíduos propensos ao risco, avessos ao risco e neutros em relação ao risco, através da observação da derivada de segunda ordem da função utilidade.

Medidas de Aversão ao Risco

- Logo, dada uma função utilidade U(.) , temos:

$$Avesso \Rightarrow U' > 0 \;\; e \, U'' < 0.$$

$$\text{Propenso} \Rightarrow U' > 0 \;\; e \, U'' > 0.$$

$$\text{Neutro} \Rightarrow U' > 0 \;\; e \, U'' = 0.$$

- Avesso ao Risco
  - Exemplos: $U(W) = \ln W$, $U(W) = \sqrt{W}$
- Propenso ao Risco
  - Exemplos: $U(W) = \exp(W)$, $U(W) = W^2$
- Neutro ao Risco
  - Exemplos: $U(W) = W$, $U(W) = 10 + 34W$

Medidas de Aversão ao Risco

- Uma pergunta que não foi respondida:
- caso a riqueza do indivíduo aumente, ele aplicará mais ou menos em ativos de risco ?
  - Se o volume aumentar (valor absoluto), diz-se que o investidor possui aversão absoluta ao risco decrescente.
  - Se o volume permanecer inalterado (valor absoluto), diz-se que o investidor possui aversão absoluta ao risco constante.
  - Se o volume diminuir (valor absoluto), diz-se que o investidor possui aversão absoluta ao risco crescente.

Medidas de Aversão ao Risco

- O economistas Kenneth Arrow e John W. Pratt demonstraram que os resultados anteriores podem ser resumidos em uma formula matemática denominada coeficiente de aversão absoluta ao risco de Arrow-Pratt.

$$R_A(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)}$$

- Aversão Absoluta ao Risco Decrescente $\Rightarrow R_A'(W) < 0$
- Aversão Absoluta ao Risco Constante $\Rightarrow R_A'(W) = 0$
- Aversão Absoluta ao Risco Crescente $\Rightarrow R_A'(W) > 0$

Medidas de Aversão ao Risco

- Exemplos:

$$U(W) = \ln(W)$$

$$U' = W^{-1} \quad e \quad U'' = -W^{-2}$$

$$R_A = -\frac{-W^{-2}}{W^{-1}} \Rightarrow R_A = W^{-1}$$

$$R_A' = -1\,\mathrm{W}^{-2} < 0$$

Logo, a função logarítmica apresenta aversão absoluta ao risco decrescente. Assim, quando a riqueza aumenta, o agente econômico aumentará o volume aplicado em ativos de risco

Interpretando:
Observe que, conforme a riqueza vai aumentando o coeficiente de aversão absoluta ao risco de Arrow-Pratt vai diminuindo (derivada negativa em relação à W). Logo, a aversão absoluta ao risco é decrescente.

Medidas de Aversão ao Risco

- Exemplos:

$$U(W) = -e^{-AW}$$

$$U' = Ae^{-AW} \quad e \quad U'' = -A^2 e^{-AW}$$

$$R_A = -\frac{-A^2 e^{-AW}}{Ae^{-AW}} \Rightarrow R_A = A$$

$$R_A' = 0$$

Logo, a função logarítmica apresenta aversão absoluta ao risco constante. Assim, quando a riqueza aumenta, o agente econômico manterá constante o volume aplicado em ativos de risco

Interpretando:
Observe que, conforme a riqueza vai aumentando o coeficiente de aversão absoluta ao risco de Arrow-Pratt não se altera, pois não é função de W (derivada em relação à W = 0). Logo, a aversão absoluta ao risco é constante.

Medidas de Aversão ao Risco

- Outra forma para se caracterizar a aversão ao risco é observar como a porcentagem da riqueza do indivíduo aplicada em ativos de risco varia com o total da riqueza.

- Suponha que a riqueza do indivíduo dobre:
  - se ele mantém o mesmo percentual da riqueza aplicado em ativos de risco, diz-se que ele possui aversão relativa constante ao risco;
  - se ele aumenta o percentual da riqueza aplicado em ativos de risco, diz-se que ele possui aversão relativa decrescente ao risco;
  - se ele diminui o percentual da riqueza aplicado em ativos de risco, diz-se que ele possui aversão relativa crescente ao risco.

Medidas de Aversão ao Risco

- Mais uma vez, Arrow e Pratt demonstraram que o resultado anterior pode ser resumido através da seguinte expressão matemática, que calcula o coeficiente de aversão relativa ao risco.

$$R_R(W) = -W\frac{U''(W)}{U'(W)} = W \bullet R_A(W)$$

- Aversão Relativa ao Risco Decrescente $\Rightarrow R_R'(W) < 0$
- Aversão Relativa ao Risco Constante $\Rightarrow R_R'(W) = 0$
- Aversão Relativa ao Risco Crescente $\Rightarrow R_R'(W) > 0$

Redução do Risco

- Três instrumentos utilizados pelos agentes econômicos na tentativa de redução do risco:
  - Diversificação
  - Seguros
  - Obtenção de mais informação

Redução do Risco

- **Diversificação**
  - Suponha que uma empresa tem uma escolha vender ar condicionado, aquecedores, ou ambos.
  - A probabilidade de estar quente ou frio é de 0,5.
  - A empresa provalvelmente estaria melhor optando pela diversificação.

Rendimentos da Venda de Utensílios

	Clima Quente	Clima Frio
Venda de ar-condicionado	$30.000	$12.000
Venda de Aquecedores	$12.000	$30.000
* 0.5 probabilidade de clima quente ou frio		

Redução do Risco

Diversificação

- Se a empresa vende apenas aquecedores ou condicionadores de ar, seus rendimentos poderão ser $12.000 ou $30.000.

- Sua renda esperada seria de:
  - 1/2($12.000) + 1/2($30.000) = $21.000

Redução do Risco

Diversificação

- Se a empresa divide seu tempo igualmente entre a venda de condicionadores de ar e aquecedores, sua renda seria de $21.000, com certeza, ou seja, qualquer que fosse o clima. Logo, ela teria eliminado totalmente o risco através da diversificação.

Redução do Risco

Seguros

- A Aversão ao Risco faz com que os indivíduos decidam pagar para evitar o risco.
- Se o custo do seguro for igual ao prejuízo esperado, as pessoas com aversão ao risco comprarão um seguro, para cobrir totalmente um potencial prejuízo financeiro.

A Decisão de Adquirir Seguro

Seguro (Assaltos)	Ocorrência (Pr = 0,1)	Não Ocorrência (Pr = 0,9)	Posses Esperadas	Desvio Padrão
Não	$40.000	$50.000	$49.000	$9.055
Sim	$49.000	$49.000	$49.000	$0

Redução do Risco

Seguro

- Enquanto as posses esperadas são as mesmas, a variabilidade é bem diferente.
- Não havendo assalto, o agente não segurado ganhará \$1000 em relação ao agente segurado. Mas se o assalto ocorrer, o primeiro perde \$9000 em relação ao segundo.
- Devemos recordar que, para um indivíduo avesso ao risco, as perdas valem mais (em termos de utilidade) do que os ganhos. Logo, um agente avesso ao risco obterá mais utilidade fazendo o seguro.

Redução do Risco

A Lei dos Grandes Números

- Embora os eventos singulares sejam aleatórios e bastante imprevisíveis, o resultado médio de muitos eventos similares pode ser previsto.
- Os consumidores normalmente adquirem seguros em empresas especializadas. Em geral, as seguradoras são empresas que oferecem seguro porque sabem que, quando conseguem vender muitas apólices, defrontam-se com riscos relativamente menores. A capacidade de evitá-los por meio de operações em larga escala é baseada na lei dos grandes números.

Redução do Risco

Atuarialmente Justo

- **Assumimos:**
  - 10% de probabilidade de perder \$10.000 devido um assalto a sua residência
  - Prejuízo Esperado = 0,10 x \$10.000 = \$1.000 com um alto risco (10% de probabilidade de perder \$10.000)
  - 100 pessoas fazem o mesmo seguro

Redução do Risco

Atuarialmente Justo

- Então:
  - Um prêmio de $1.000 gera um fundo no valor de $100.000 para cobrir prejuízos
  - A empresa seguradora, confiando na lei dos grandes números, sabe que o prejuízo esperado dos 100 consumidores como um todo deve ser de $100.000, não devendo estar preocupada com um prejuízo superior a tal valor.
  - Logo, quando o prêmio do seguro é igual ao valor pago na ocorrência do sinistro, dizemos que o seguro é atuarialmente justo.

Prêmio Atuarialmente Justo e o Equivalente Certo ou de Certeza

- Considere a seguinte loteria em que o indivíduo possui uma riqueza inicial de \$40.000. Suponha que ele corre um risco de 25% de perder esse valor. Logo, o valor esperado da loteria é dado por:

$$E(L) = 0,25 \bullet \$0 + 0,75 \bullet \$40.000 = \$30.000$$

- Imagine que esse indivíduo esteja cogitando comprar um seguro, cujo custo é dado pelo prêmio p.
- A seguradora possui uma renda certa e definida, que chamaremos de p (custo do seguro para o contratante, dado pelo prêmio p). Porém, seu custo depende da ocorrência ou não do sinistro, o que torna seu lucro uma variável aleatória. Assim, a expectativa de lucro da seguradora pode ser representada por dada por:

Prêmio Atuarialmente Justo e o Equivalente Certo ou de Certeza

- Expectativa de Lucro da Seguradora

$$\boxed{E(L) = p - E(custo)}$$

- O custo esperado da seguradora é dado pela perda esperada do ponto de vista do contratante do seguro.

$$E(custo) = 0{,}25\ (\$40.000) + 0{,}75\ (\$0) = \$10.000$$

- O prêmio atuarialmente justo (PAJ), é o valor de p que torna o lucro esperado da seguradora igual a zero. Logo, ele ocorre quando o valor pago pelo seguro é igual ao valor esperado da perda, ou seja, o lucro esperado da seguradora é igual a zero.

$$\boxed{E(lucro) = PAJ - E(custo) = 0 \Rightarrow PAJ = E(custo)} = \$10.000$$

Prêmio Atuarialmente Justo e o Equivalente Certo ou de Certeza

- Como vimos, a decisão em um contexto de incerteza deve ser tomada observando-se a função utilidade.
- Supondo que a função utilidade, neste caso, seja $U(W) = \sqrt{W}$:
- A utilidade esperada do indivíduo é dada por:

$$E(U) = 0,25 \bullet U(\$0) + 0,75 \bullet U(\$40.000) = 0,75 \bullet \sqrt{\$40.000} = \$150$$

- Existe um montante, conhecido como equivalente certo ou de certeza, que é o valor monetário que deixa o indivíduo indiferente entre este e sua utilidade esperada. Dito de outro modo, o equivalente certo (EC) é o montante que o indivíduo aceitaria receber com certeza para não entrar numa loteria.

Prêmio Atuarialmente Justo e o Equivalente Certo ou de Certeza

- Logo, a utilidade do equivalente certo deve ser igual à utilidade esperada.

$$\boxed{E(EC) = E(U)} \Rightarrow \sqrt{EC} = \$150 \Rightarrow EC = \$22.500$$

- Assim, o valor certo que deixa o indivíduo indiferente, em termos de utilidade, entre participar ou não da loteria é de $22.500.

- O prêmio de risco (PR) informa o valor monetário da riqueza esperada que o indivíduo estaria disposto a abrir mão para se ver livre do risco. Logo:

$$\boxed{PR = E(L) - EC} = \$30.000 - \$22.500 = \$7.500$$

- No nosso exemplo, o prêmio de risco é igual a $7.500, que é igual a diferença entre $30.000 e $22.500.

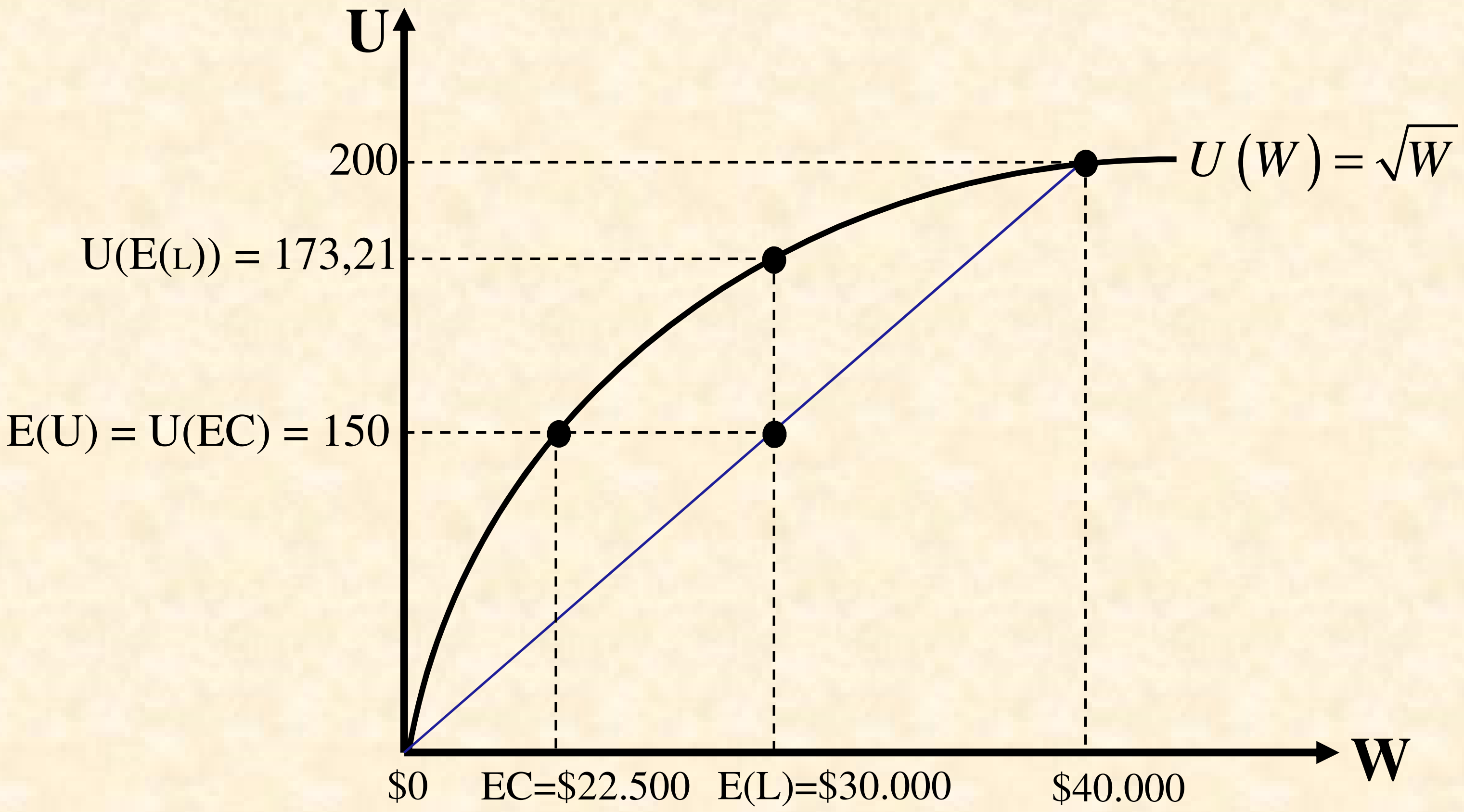
Prêmio Atuarialmente Justo e o Equivalente Certo ou de Certeza

- O prêmio máximo do seguro (P_M) que o indivíduo estaria disposto a pagar é dado pelo valor que o deixa indiferente entre fazer ou não o seguro. Logo:

$$\boxed{P_M = PR + PAJ} = \$7.500 + \$10.000 = \$17.500$$

- Assim, o maior valor que pode ser cobrado por uma seguradora para realizar o seguro de um indivíduo que participa dessa loteria é $17.500.

Prêmio Atuarialmente Justo e o Equivalente Certo ou de Certeza



Observe que o PR = E(L) – EC = $7.500, que é a quantia que o indivíduo estaria disposto a abrir mão para evitar o risco.
Observe também que o prêmio máximo que o indivíduo estaria disposto a pagar é igual a P_M = PR + (PAJ = EC) = $ 17.500.

Exemplo 1

- **Suponha que a função de utilidade de Natasha seja expressa por: $U(I) = I^{0,5}$, na qual I representa sua renda anual em milhares de dólares.**

a) **Natasha é amante do risco, neutra a riscos, ou avessa a riscos?**

Como a função utilidade é estritamente côncava, ela é avessa ao risco.

Outra forma de chegarmos a essa conclusão é supondo que ela tenha \$10.000 e lhe seja oferecida uma aposta na qual ela ganha \$1.000 com probabilidade 0,5 e perde \$1.000 com probabilidade 0,5. (observe que a renda está medida em milhares de dólares. Logo, \$10.000 equivale a 10).

Exemplo 1

Note que o valor esperado é o mesmo:

VE = 0,5(\$9.000) + 0,5(\$11.000) = \$10.000

A utilidade associada a \$10.000 é 3.162.

$U(I) = 10^{0,5} = 3.162.$

A utilidade esperada da aposta é:

$EU = (0,5)(9^{0.5}) + (0,5)(11^{0.5}) = 3.158 < 3.162.$

Logo, ela não aceitaria a aposta. Dito de outo modo, ela prefere (mais utilidade) uma renda certa a uma renda incerta com o mesmo valor esperado. Se ela fosse neutra a riscos, ela seria indiferente entre os \$10.000 e a aposta; e se fosse amante do risco, ela preferiria a aposta.

Exemplo 1

b) **Suponha que Natasha atualmente esteja recebendo uma renda de \$10.000 (*I* = 10), podendo com certeza obter a mesma renda no ano que vem. Ela recebe, então, uma oferta para um novo emprego com rendimentos de \$16.000, com probabilidade de 0,5 e rendimentos de \$5.000, com probabilidade de também 0,5. Ela deveria assumir o novo emprego?**

Note que VE = 0,5(\$16.000) + 0,5(\$5.000) = \$10.500 > \$10.000

A utilidade de seu salário atual é $10^{0,5}$, ou seja, 3.162.

A utilidade esperada do novo emprego é

$EU = (0,5)(5^{0,5}) + (0,5)(16^{0,5}) = 3.118$, que é menor que 3.162. Logo, ela recusaria o novo emprego.

Exemplo 1

c) **No item (b), Natasha estaria disposta a adquirir um seguro para poder se proteger contra a renda variável associada ao novo emprego? Em caso afirmativo, qual o valor que estaria disposta a pagar por tal seguro? (Sugestão: Qual é o prêmio de risco?)**

Supondo que Natasha aceitasse o novo emprego, ela estaria disposta a pagar um prêmio de risco igual à diferença entre $10.000 e o nível de renda certa associado à utilidade da aposta, de modo a garantir um nível de utilidade igual a 3.162.

Exemplo 1

Sabemos que a utilidade da aposta é igual a 3.118. Inserindo esse valor na sua função de utilidade:

obtemos 3.118 = $I^{0.5} \Rightarrow$ I = $9.722.

Logo, Natasha estaria disposta a pagar pelo seguro o valor dado pelo prêmio de risco: $10.000 - $9.722 = $278.

Exemplo 2

- Mr. Brown economizou \$5.000 e planeja gastar esse dinheiro com uma viagem ao Brasil. A utilidade dessa viagem é uma função do logaritmo dos gastos no Brasil e é dada por $U=\ln(G)$.
- A probabilidade de que Mr. Brown venha a perder \$2.000 é de 40%. Para evitar esse risco, ele pode fazer um seguro, pagando um prêmio de \$800.

Exemplo 2

- Pede-se:
  - O prêmio de $800 é atuarialmente justo ?
  - Mr. Brown é propenso ou avesso ao risco ?
  - Qual o prêmio máximo que Mr. Brown estaria disposto a pagar ?
  - Qual a utilidade esperada da viagem sem o seguro ?
  - Qual a utilidade esperada da viagem com o seguro ?

Exemplo 2

- A) Existe a possibilidade de 40% de ficar apenas com \$3.000, e a possibilidade de 60% de ficar com os \$5.000. Logo:
  - E(G) = 0,4(3000)+0,6(5000) = \$4.200
  - O prêmio atuarialmente justo é calculado como sendo o valor dos gastos menos o valor esperado, G – E(G) = 5000-4200 = \$800.

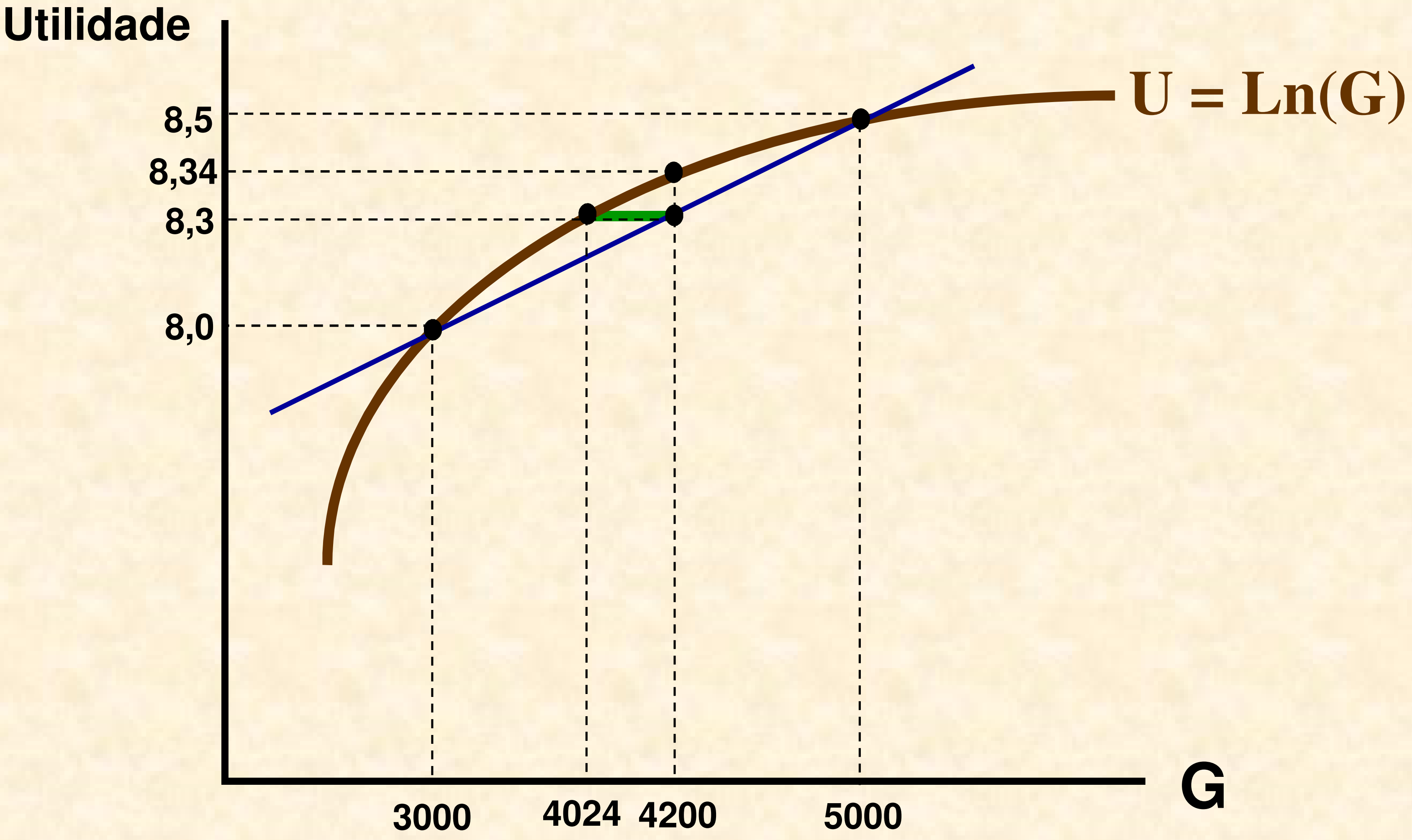
Exemplo 2

- B) A utilidade esperada da viagem sem o seguro é dada por:
  - 0,4 U(3000) + 0,6 U(5000)
    0,4 Ln(3000) + 0,6 Ln(5000)
    0,4(8) + 0,6(8,5) = 8,3
- C) A utilidade esperada da viagem com o seguro é a utilidade de ter seus gastos iguais a $4.200, pois já teria pago os $800 do seguro.
  - U(4200) = Ln(4200) = 8,34

Exemplo 2

- D) Mr. Brown é avesso ao risco, pois a utilidade obtida viajando com o seguro é maior que a utilidade obtida correndo risco.
- E) Para calcular o prêmio máximo que ele estaria disposto a pagar, temos que fazer o que segue:
  - $Ln(Y^*) = 8{,}3 \longrightarrow Y^* = 4.023{,}87$
    Logo, 5.000 – 4023,87 = 976,13 , que o prêmio máximo que Mr. Brown pagaria.

Um Exemplo Quantitativo



Exemplo – ANPEC - 1993

- Madame Pompidou economizou 10.000 euros e planeja gastar esse dinheiro com uma viagem ao Brasil. A utilidade da viagem é uma função do logaritmo de seus gastos no Brasil e é dada por U = ln(G). Nesta viagem existe uma probabilidade de 25% de que ela venha a perder 1.000 euros. Para evitar esse risco de perda de 1.000 euros, ela pode fazer um seguro pagando um prêmio de 250 euros. Pode-se afirmar que:

Exemplo – ANPEC - 1993

a) O prêmio cobrado é atuarialmente justo.

Do ponto de vista da seguradora, ela possui uma renda certa e definida igual a p (custo do seguro, dado pelo prêmio p). Porém, seu custo depende da ocorrência ou não do do sinistro, o que torna seu lucro uma variável aleatória. Assim, a expectativa de lucro da seguradora é dada por:

$$\boxed{E(L) = p - E(custo)}$$

O custo esperado da seguradora é dado pela perda esperada do ponto de vista do contratante do seguro. Assim:

$$\boxed{E(lucro) = 250 - (0{,}25 \times 1000 + 0{,}75 \times 0) = 0}$$

Logo, o prêmio é atuarialmente justo, pois o valor pago pelo seguro é igual ao valor esperado da perda, ou seja, o lucro esperado da seguradora é igual a zero.

Exemplo – ANPEC - 1993

b) Fazendo o seguro, a utilidade esperada da viagem será menor do que sem fazê-lo.

Sem o Seguro

$$E(U)_{SS} = 0,75\ln(10.000) + 0,25\ln(9.000)$$

$$E(U)_{SS} = 0,75(9,21034) + 0,25(9,10498) = 9,184$$

Com o Seguro

$$E(U)_{CS} = \ln(10.000 - 250) \Rightarrow E(U)_{CS} = \ln(9.750)$$

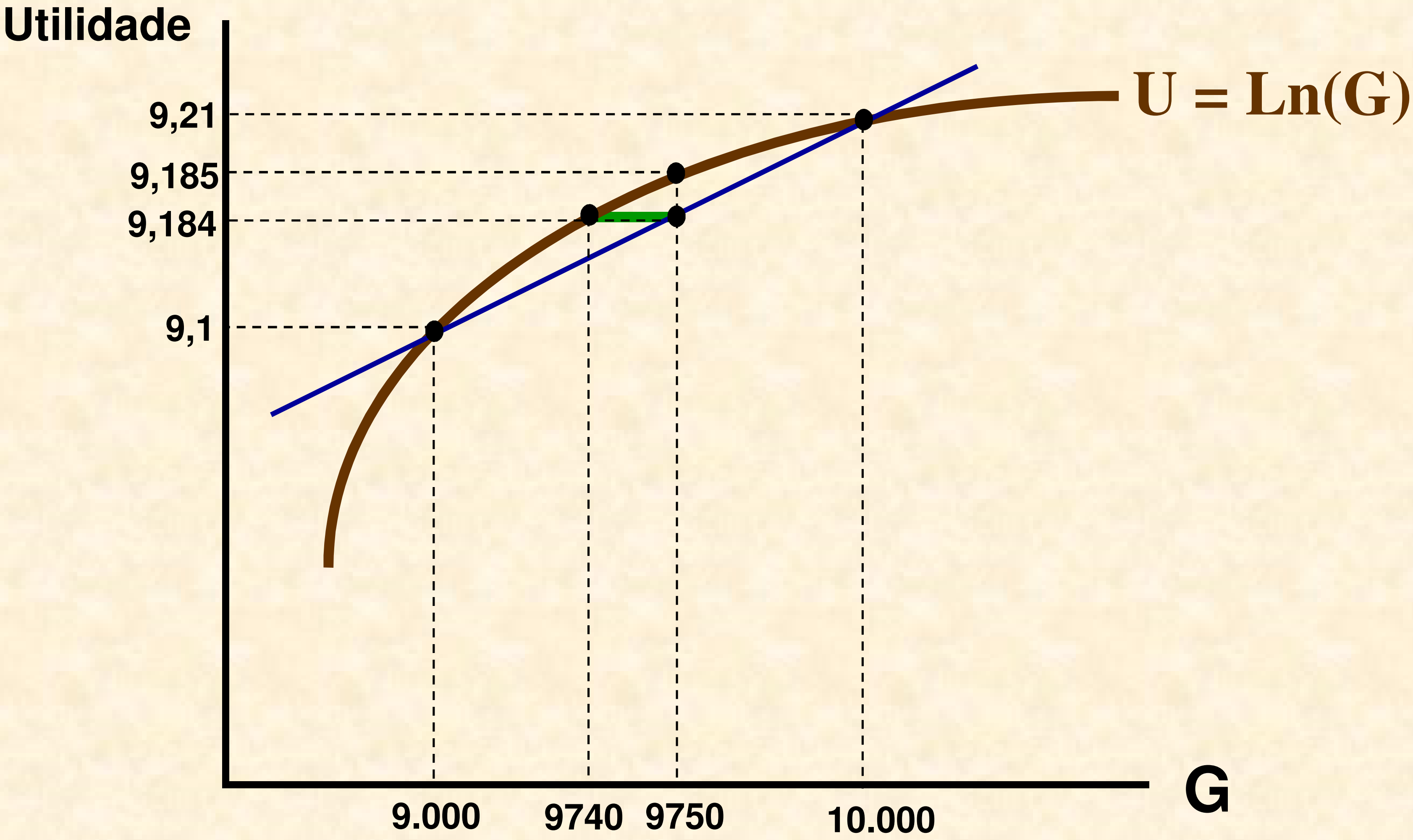
$$E(U)_{CS} = 9.185$$

Exemplo – ANPEC - 1993

c) O prêmio máximo que ela deveria pagar é 240 euros.

O prêmio máximo que o indivíduo deveria pagar é um valor que o deixa indiferente entre fazer o seguro ou não fazer. Portanto, esse valor deve satisfazer:

$$\underbrace{\ln(G^*) = 9.184}_{\text{Utilidade Esperada sem o seguro}} \Rightarrow G^* = 9.740 \Rightarrow 10.000 - 9.740 = 260$$


Utilidade
U = Ln(G)
9,21
9,185
9,184
9,1
G
9.000
9740
9750
10.000

1) Engenheiro – BNDES – CESGRANRIO – 2005 - 68

- A função de utilidade de um indivíduo é expressa por: $U(W) = (W)^{1/2}$ onde W é a riqueza. Podemos afirmar que o indivíduo:

a) é propenso ao risco;

b) é avesso ao risco;

c) é indiferente ao risco;

d) possui riqueza constante;

e) é indiferente ao risco com grau de neutralidade unitário.

- Observe que a função utilidade é estritamente côncava. Logo, podemos dizer:
- O indivíduo é avesso ao risco
  - O indivíduo prefere uma renda certa do que uma renda incerta com o mesmo valor esperado.
  - O indivíduo possui utilidade marginal decrescente para a renda.

- Outra forma de checar a se ele é avesso ao risco é calculando as derivadas de primeira e segunda ordem.

$$U(W) = W^{\frac{1}{2}} \Rightarrow U' = \frac{1}{2}W^{-\frac{1}{2}} > 0 \ e \ U'' = -\frac{1}{4}W^{-\frac{3}{2}} < 0$$

- Logo, como U’ > 0 e U’’ < 0 , a função cresce à taxas decrescentes.

2) Economista Jr. – Petrobrás – CESG. – 2010 - 25

- Uma pessoa deve escolher entre receber R$ 100,00 com 100% de probabilidade, ou receber o resultado de um sorteio no qual pode ganhar R$ 150,00 com 30% de probabilidade, ou R$ 80,00 com 70% de probabilidade. A pessoa escolhe a alternativa de receber R$100,00 com certeza. Nestas circunstâncias, constata-se que, no seu nível de renda atual e para esses possíveis acréscimos de renda, em relação ao risco, a pessoa é

a) neutra.

b) propensa.

c) avessa.

d) indiferente.

e) racional.

$U_E = 150 \times 0{,}3 + 80 \times 0{,}7 = 106$

Prefere uma renda certa a uma renda incerta mesmo com $U_E > 100$

3) BNDES – Economista – 2005 - 32

- Assinale a alternativa correta:

a) um bem é considerado de Giffen quando o efeito renda e o efeito substituição agem em direções opostas;

b) um consumidor com função de utilidade von Neumann-Morgenstern dada por $u(M) = m^2 + 4$, onde m é sua riqueza, é avesso ao risco e nunca irá participar de jogos de apostas;

c) se as preferências de um consumidor maximizador são representadas pela função de utilidade $U(x_A, x_B) = x_A^{0,4} x_B^{0,6}$, onde x_A e x_B são as quantidades consumidas de dois bens (A e B), e sua renda é de R$100 e os preços dos bens A e B são, respectivamente, R$2 e R$4, o valor em módulo da taxa marginal de substituição do bem A pelo bem B, no ponto de escolha ótima, será 2;

d) se a função de demanda de um determinado produto for dada por $D(p) = 1000p^{-2}$, onde p é seu preço, a elasticidade-preço irá variar ao longo da curva de demanda;

e) quanto maior for o número de substitutos para um produto, menor será o efeito de uma variação do preço deste produto sobre a variação em sua quantidade demandada

Esta questão foi colocada principalmente por conta do item b

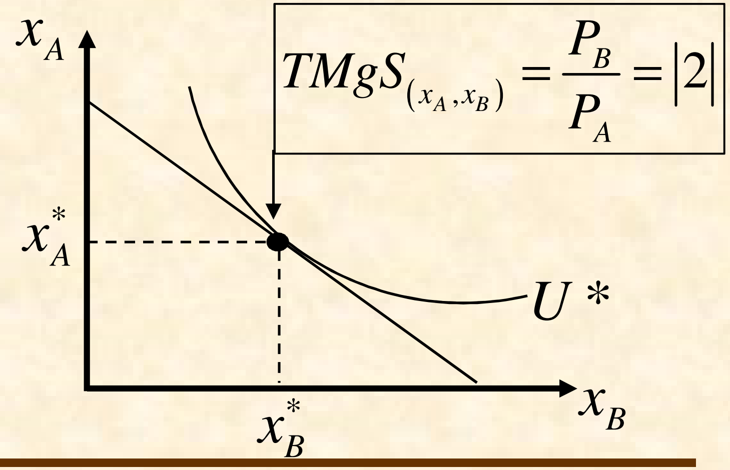
- Quanto ao item A, ele está incorreto, pois um bem de Giffen é aquele que possui os efeitos substituição e renda negativos, com o efeito renda dominando o efeito substituição. Com isso, a curva de demanda passa a ter inclinação positiva.
- Quanto ao item B ele está incorreto. A função apresentada cresce à taxas crescentes. Portanto, caracteriza um agente propenso ao risco. Podemos nos certificar disso, fazendo:

$$u(m) = m^2 + 4 \Rightarrow u' = 2m \ e \ u'' = 2$$

  - Como as derivadas de primeira e de segunda ordem são positivas, a função utilidade cresce à taxas crescentes.

- O item C é verdadeiro.
  - Em equilíbrio, temos: $TMgS_{(x_A, x_B)} = \frac{P_B}{P_A}$
  - Logo, ao observarmos a relação de preços, teremos a TMgS em equilíbrio.
  - Cuidado! A questão pede a TMgS do bem A pelo bem B. Logo, devemos isolar o bem A na Restrição orçamentária.

$$\boxed{m = P_A x_A + P_B x_B \Rightarrow x_A = \frac{m}{P_A} - \frac{P_B}{P_A} x_B}$$



- O item D é falso. Como vimos, caso a função de demanda seja dada por $D(p) = 1000p^{-2}$, a elasticidade-preço da demanda é constante e, neste caso, igual a |2|.
- Quanto ao item E, ele é falso.
  - Quanto maior o número de substitutos para um determinado bem, maior será a elasticidade-preço da demanda.

4) Bacen – Analista – Específica – 2010 - 39

- Um certo investidor aplica em ativos com risco uma proporção constante de sua riqueza. Logo, ele apresenta, em relação a risco,

(A) neutralidade.

(B) propensão negativa.

(C) aversão absoluta decrescente.

(D) aversão absoluta constante.

(E) aversão relativa crescente.

O item C é verdadeiro.

- Suponha a seguinte situação, onde A_R e A_{SR} representam, respectivamente, ativos de risco e ativos sem risco.

$W = \$1000$	$A_R = \$500 = 50\%$ $A_{SR} = \$500 = 50\%$

$W = \$2000$	$A_R = \$1000 = 50\%$ $A_{SR} = \$1000 = 50\%$

- Observe que, dado um aumento da riqueza, para que a proporção alocada em ativos de risco e sem risco se mantenha constante (como afirma a questão), o valor monetário alocado em ativos de risco e sem risco deve aumentar proporcionalmente. Neste caso, o agente econômico apresenta aversão absoluta ao risco decrescente e aversão relativa ao risco constante.

- **Aversão absoluta ao risco decrescente:**
  - se a riqueza do investidor aumentar, aumenta o montante investido em ativos com risco.

- **Aversão relativa ao risco constante:**
  - se a riqueza do investidor variar, mantém-se a porcentagem investida em ativos com risco.

5) Bacen – Analista - 2001

- Para que uma função utilidade por riqueza (W) represente aversão ao risco por parte de um investidor, a função deve ter a(s) seguinte(s) propriedade(s):

a) Ser crescente com W e crescer a taxas cada vez maiores

b) Ser uma função linear de W.

c) Ser uma função linear e crescente de W.

d) Ser crescente com W e crescer a taxas cada vez menores.

e) Decrescente com W e linear.

Como vimos anteriormente.

6) Bacen – Analista - 2001 Anulada

- Um investidor com aversão ao risco:

a) Jamais aceita fazer aplicações com risco.

b) Faz aplicações com risco somente se o retorno esperado for superior a taxa de juros livre de risco.

c) Prefere fazer aplicações nas quais a taxa de retorno é garantida.

d) Só faz aplicações com risco quando o retorno esperado é pelo menos igual ao prêmio de risco exigido.

e) Não sabe medir riscos e faz qualquer tipo de aplicação.

- A questão foi anulada, pois um investidor avesso ao risco só fará aplicações em ativos de risco, caso a utilidade esperada seja superior à utilidade que pode ser obtida através da aplicação em um ativo sem risco. Dito de outro modo, o investimento só acontece caso o prêmio de risco seja superior à taxa de juros livre de risco.

7) Fiscal – ICMS – RJ – 2008 (Amarela) (Exercício "duro")

- Considere o problema de um indivíduo que possui uma renda exógena Y = 100 e deve decidir quanto dessa renda declarará ao fisco. Suponha que o indivíduo possa declarar um valor entre 0 e 100, inclusive. Para qualquer valor declarado menor do que 100, o indivíduo estaria mentindo e, portanto, tentando sonegar imposto. A tarifa de imposto de renda é t = 20%. As preferências desse indivíduo, definidas sobre sua renda final disponível, são dadas pela seguinte função utilidade: $U(Y) = \sqrt{Y}$. Suponha que esse indivíduo vise a maximizar sua utilidade esperada. Após declarar sua renda, ele será fiscalizado com probabilidade p = 35%. Caso seja apanhado tentando sonegar imposto, terá de pagar o valor devido mais uma multa equivalente ao montante que tentou sonegar. Com isso, é possível afirmar que o indivíduo declarará uma renda igual a:

A) 0 B) 25 C) 50 D) 75 E) 100.

- Sendo D o valor da renda declarada e Y o valor da sua renda disponível, temos duas situações possíveis.
  - Se ele for pego tentando sonegar (35% de probabilidade) sua renda será dada por:

$$Y_1 = \$100 - \underbrace{0,40\left(\$100 - D\right)}_{\text{multa}} - \underbrace{0,2D}_{\text{imposto}}$$

  - Se ele não for pego (65% de probabilidade) sua renda será dada por:

$$Y_2 = \$100 - 0,2D$$

- Calculando o valor esperado da loteria como função da renda declarada.

$$E(U_D) = 0,35 \bullet \sqrt{\$100 - 0,40(\$100 - D) - 0,2D} + 0,65 \bullet \sqrt{\$100 - 0,2D}$$

$$E(U_D) = 0,35 \bullet \sqrt{\$60 + 0,20D} + 0,65\sqrt{\$100 - 0,20D}$$

$$\frac{d(U_D)}{dD} = 0 \Rightarrow \frac{0,35}{2} \bullet \frac{0,20}{\sqrt{\$60 + 0,20D}} + \frac{0,65}{2} \bullet \frac{-0,2}{\sqrt{\$100 - 0,20D}} = 0$$

$$0,035 \bullet \frac{0,20}{\sqrt{\$60 + 0,20D}} = 0,065 \bullet \frac{-0,2}{\sqrt{\$100 - 0,20D}} \Rightarrow \frac{65}{35} = \frac{\sqrt{\$100 - 0,20D^*}}{\sqrt{\$60 + 0,20D^*}}$$

Elevando o último termo ao quadrado, temos:

$$4225 \bullet \left(\$60 + 0,20D^*\right) = 1225 \bullet \left(\$100 - 0,20D^*\right) = \$253500 + 845D^* = \$122500 - 245D^*$$

$$1090D^* = -\$131000 \Rightarrow D^* = -\$120,2$$

Logo, como o valor que o indivíduo deve declarar não pode ser negativo, o valor declarado que maximiza sua utilidade é igual a zero.

8) STN – Analista de Finanças e Controle – 2008 (Exercício "duro")

- Um indivíduo tem uma riqueza não nula e sua função utilidade Von-Neumann-Morgenstern tem a forma funcional $u(x) = k - a/x$, em que a e k são constantes positivas e $x > a/k$. Este indivíduo é convidado a participar de uma loteria que triplica a sua riqueza com probabilidade p e a reduz à terça parte com probabilidade 1-p. Assinale, dentre as opções abaixo, qual deve ser o valor mínimo de p para que o indivíduo aceite participar da loteria.

A) 30%   B) 40%   C) 55%   D) 70%   E) 75%

Equivalente Certo ou de Certeza

- O indivíduo se defronta com a seguinte loteria:
  - Y_1 = \$3W , com probabilidade p
  - Y_2 = \$W/3 , com probabilidade (1 – p)
- Pelo critério do equivalente de certeza, o valor da riqueza (W) que deixa o indivíduo indiferente entre participar ou não da loteria deve satisfazer a seguinte equação:

$$E(U_W) = U(W) \Rightarrow p \bullet U(3W) + (1-p) \bullet U(W/3) = U(W)$$

$$p \bullet [k - \alpha / 3W] + (1-p) \bullet [k - 3\alpha / W] = k - \alpha / W$$

$$pk - \frac{p\alpha}{3W} + k - \frac{3\alpha}{W} - pk + \frac{3p\alpha}{W} = k - \frac{\alpha}{W}$$

$$\frac{8p\alpha}{3W} = \frac{2\alpha}{W} \Rightarrow p = \frac{2\alpha 3W}{8\alpha W} \Rightarrow p = \frac{6}{8} = 0{,}75$$

Logo, o valor mínimo que torna o indivíduo indiferente entre participar ou não da loteria é p = 75%.

Estatísticas de Risco e Retorno

$$\sigma_R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(R_i - \overline{R}\right)^2}{n-1}$$

$$\sigma_R = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(R_i - \overline{R}\right)^2}{n-1}}$$

Onde:

$$\overline{R} = \frac{\sum_{i=1}^{n} R_i}{n}$$

→ **Valor esperado dos retornos.**

Quando todos os retornos são conhecidos, o valor esperado dos retornos é igual a média simples dos retornos.

Risco e Retorno no Mercado Financeiro

ANO	Ações Ordinárias	Ações de Empresas Menores	Obrigações de Empresas a Longo Prazo	Obrigações do Governo a Longo Prazo	Obrigações do Governo a Médio Prazo	Letras do Tesouro dos EUA	Inflação
1926	11.62	0.28	7.37	7.77	5.38	3.27	-1.49
1927	37.49	22.10	7.44	8.93	4.52	3.12	-2.08
1928	43.61	39.69	2.84	0.10	0.92	3.56	-0.97
1929	-8.42	-51.36	3.27	3.42	6.01	4.75	0.20
1930	-24.90	-38.15	7.98	4.66	6.72	2.41	-6.03
1931	-43.34	-49.75	-1.85	-5.31	-2.32	1.07	-9.52
1932	-8.19	-5.39	10.82	16.84	8.81	0.96	-10.30
1933	53.99	142.87	10.38	-0.07	1.83	0.30	0.51
1934	-1.44	24.22	13.84	10.03	9.00	0.16	2.03
1935	47.67	40.19	9.61	4.98	7.01	0.17	2.99
1936	33.92	64.80	6.74	7.52	3.06	0.18	1.21
1937	-35.03	-58.01	2.75	0.23	1.56	0.31	3.10
1938	31.12	32.80	6.13	5.53	6.23	-0.02	-0.78
1939	-0.41	0.35	3.97	5.94	4.52	0.02	-0.48
1940	-9.78	-5.16	3.39	6.09	2.96	0.00	0.96
1941	-11.59	-9.00	2.73	0.93	0.05	0.06	9.72
1942	20.34	44.51	2.60	3.22	1.94	0.27	9.29
1943	25.90	88.37	2.83	2.08	2.81	0.35	3.16
1944	19.75	53.72	4.73	2.81	1.80	0.33	2.11
1945	36.44	73.61	4.08	10.73	2.22	0.33	2.25
1946	-8.07	-11.63	1.72	-0.10	1.00	0.35	18.16

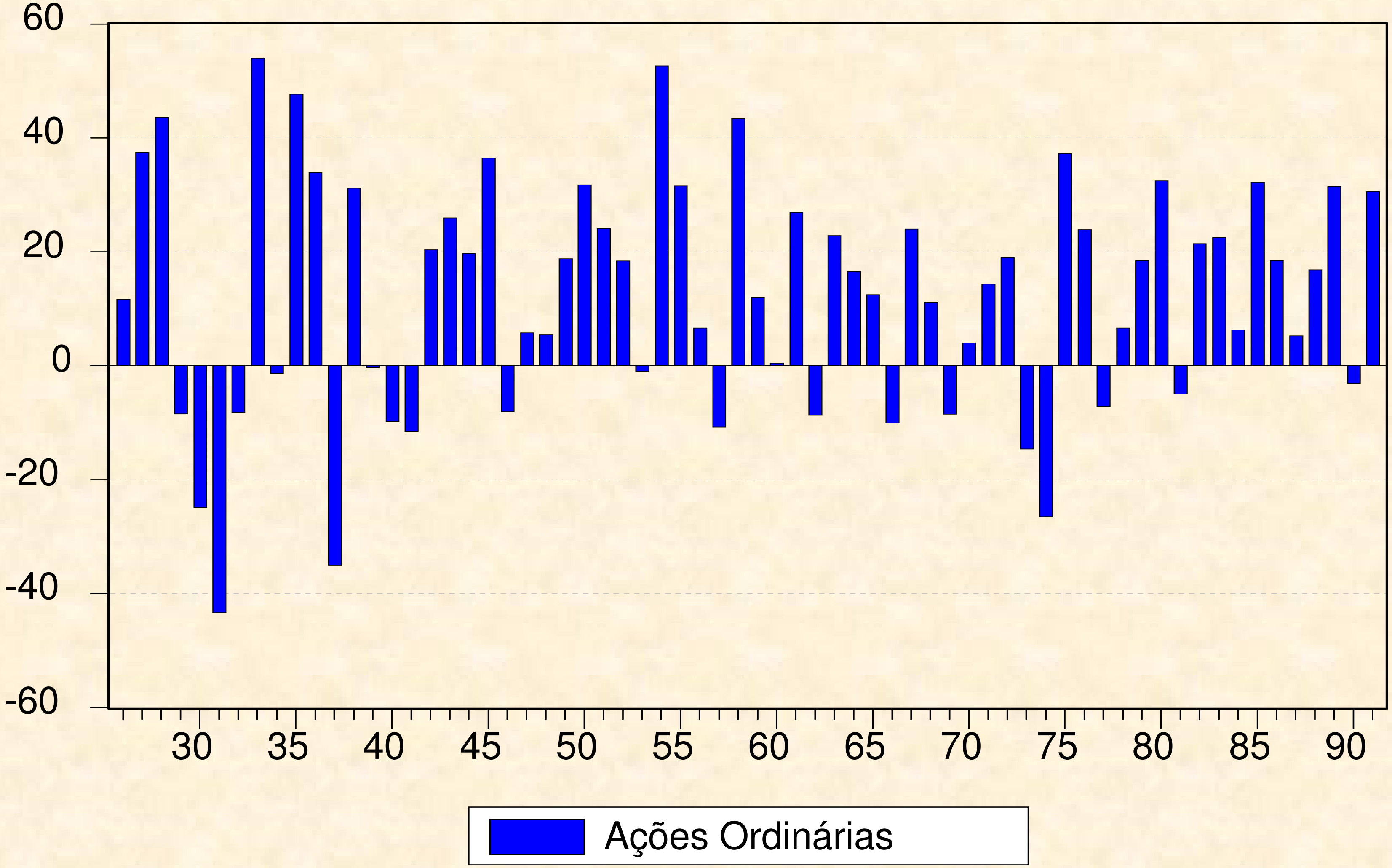
Risco e Retorno no Mercado Financeiro

1947	5.71	0.92	-2.34	-2.62	0.91	0.50	9.01
1948	5.50	-2.11	4.14	3.40	1.85	0.81	2.71
1949	18.79	19.75	3.31	6.45	2.32	1.10	-1.80
1950	31.71	38.75	2.12	0.06	0.70	1.20	5.79
1951	24.02	7.80	-2.69	-3.93	0.36	1.49	5.87
1952	18.37	3.03	3.52	1.16	1.63	1.66	0.88
1953	-0.99	-6.49	3.41	3.64	3.23	1.82	0.62
1954	52.62	60.58	5.39	7.19	2.86	0.86	-0.50
1955	31.56	20.44	0.48	-1.29	-0.65	1.57	0.37
1956	6.56	4.28	-6.81	-5.59	0.42	2.46	2.86
1957	-10.78	-14.57	8.71	7.46	7.84	3.14	3.02
1958	43.36	64.89	-2.22	-6.09	-1.29	1.54	1.76
1959	11.96	16.40	-0.97	-2.26	-0.39	2.95	1.50
1960	0.47	-3.29	9.07	13.78	11.76	2.66	1.48
1961	26.89	32.09	4.82	0.97	1.85	2.13	0.67
1962	-8.73	-11.90	7.95	6.89	5.56	2.73	1.22
1963	22.80	23.57	2.19	1.21	1.64	3.12	1.65
1964	16.48	23.52	4.77	3.51	4.04	3.54	1.19
1965	12.45	41.75	-0.46	0.71	1.02	3.93	1.92
1966	-10.06	-7.01	0.20	3.65	4.69	4.76	3.35
1967	23.98	83.57	-4.95	-9.18	1.01	4.21	3.04
1968	11.06	35.97	2.57	-0.26	4.54	5.21	4.72
1969	-8.50	-25.05	-8.09	-5.07	-0.74	6.58	6.11
1970	4.01	-17.43	18.37	12.11	16.86	6.52	5.49
1971	14.31	16.50	11.01	13.23	8.72	4.39	3.36
1972	18.98	4.43	7.26	5.69	5.16	3.84	3.41
1973	-14.66	-30.90	1.14	-1.11	4.61	6.93	8.80

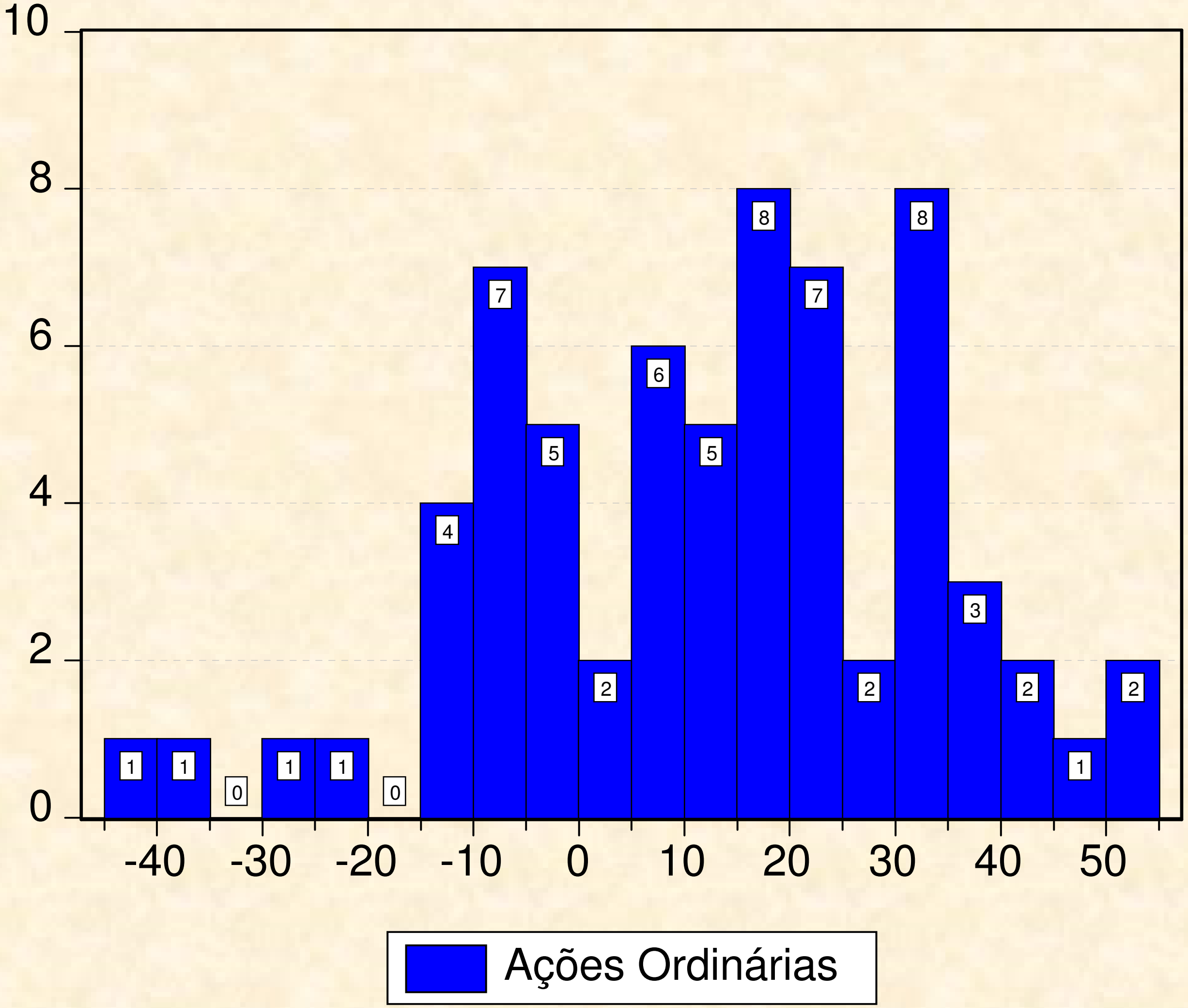
Risco e Retorno no Mercado Financeiro

1974	-26.47	-19.95	-3.06	4.35	5.69	8.00	12.20
1975	37.20	52.82	14.64	9.20	7.83	5.80	7.01
1976	23.84	57.38	18.65	16.75	12.87	5.08	4.81
1977	-7.18	25.38	1.71	-0.69	1.41	5.12	6.77
1978	6.56	23.46	-0.07	-1.18	3.49	7.18	9.03
1979	18.44	43.46	-4.18	-1.23	4.09	10.38	13.31
1980	32.42	39.88	-2.62	-3.95	3.91	11.24	12.40
1981	-4.91	13.88	-0.96	1.86	9.45	14.71	8.94
1982	21.42	28.01	43.79	40.36	29.10	10.54	3.87
1983	22.51	39.67	4.70	0.65	7.41	8.80	3.80
1984	6.27	-6.67	16.39	15.48	14.02	9.85	3.95
1985	32.16	24.66	30.90	30.97	20.33	7.72	3.77
1986	18.47	6.85	19.85	24.53	15.14	6.16	1.13
1987	5.23	-9.30	-0.27	-2.71	2.90	5.47	4.41
1988	16.81	22.87	10.70	9.67	6.10	6.35	4.42
1989	31.49	10.18	16.23	18.11	13.29	8.37	4.65
1990	-3.17	-21.56	6.78	6.18	9.73	7.81	6.11
1991	30.55	44.63	19.89	19.30	15.46	5.60	3.06

Risco e Retorno no Mercado Financeiro



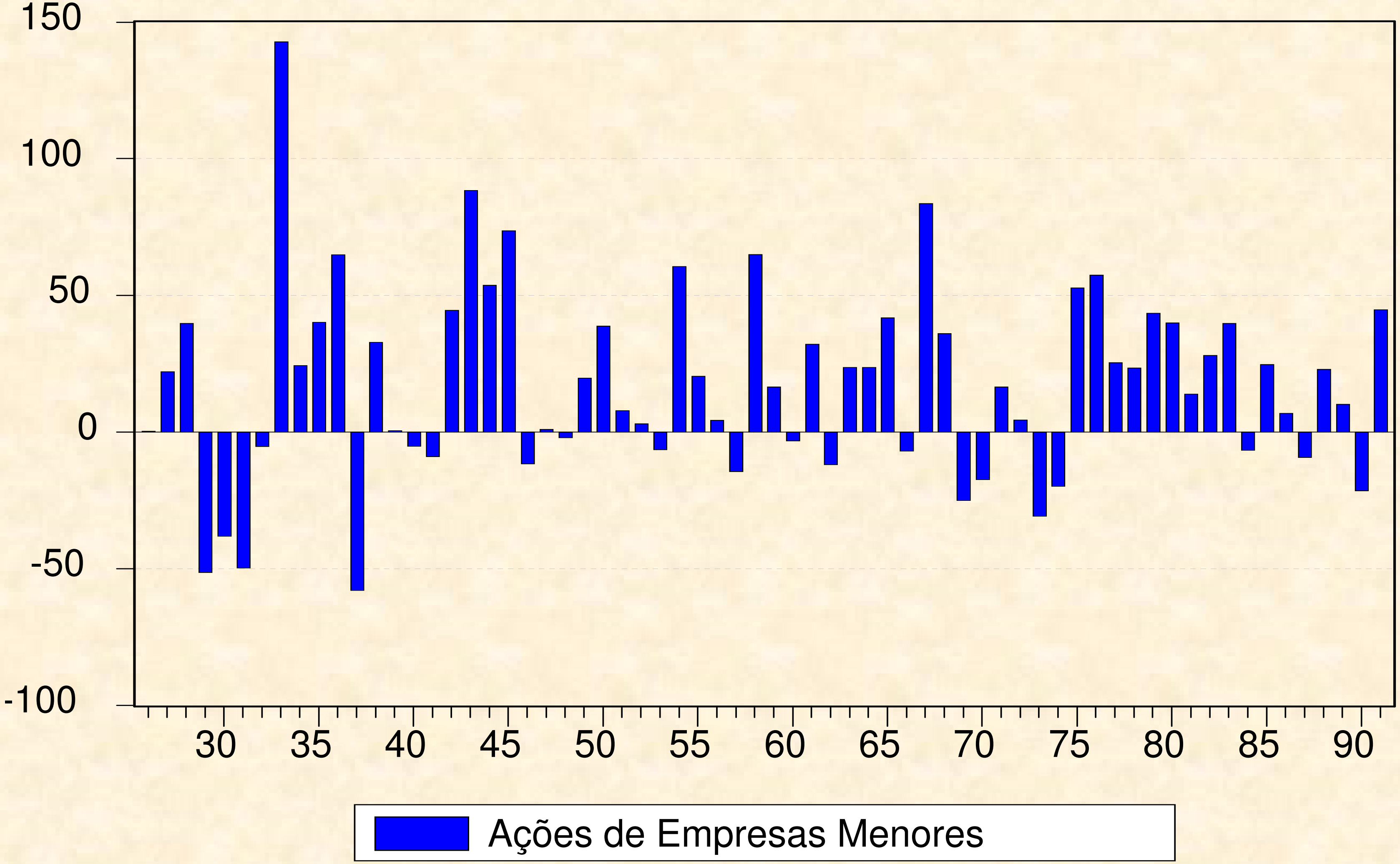
Risco e Retorno no Mercado Financeiro



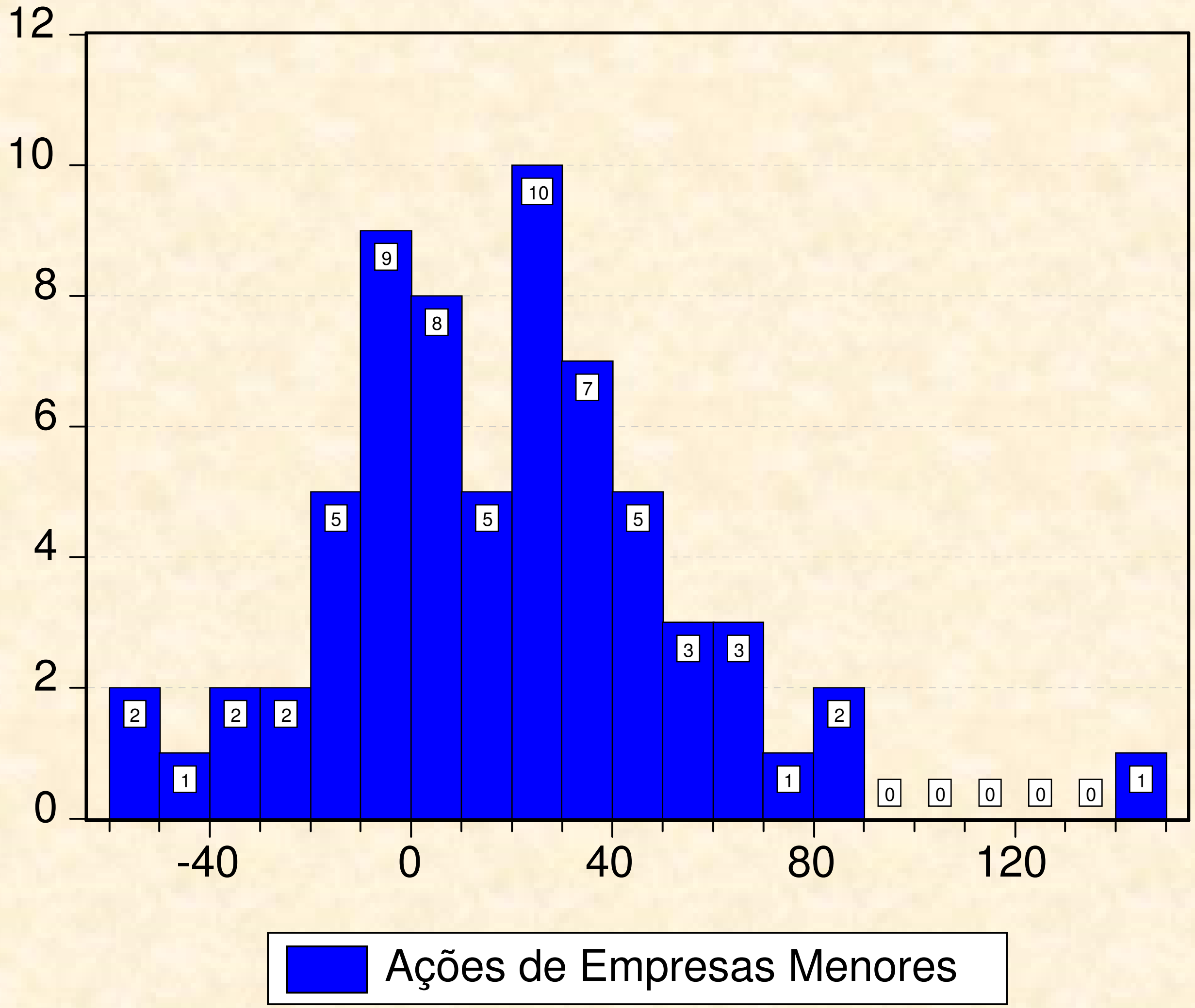
Series: Ações Ordinárias
Sample 1926 1991
Observations 66

Mean	12.42712
Median	15.39500
Maximum	53.99000
Minimum	-43.34000
Std. Dev.	20.75647
Skewness	-0.299784
Kurtosis	2.813986
Jarque-Bera	1.083727
Probability	0.581663

Risco e Retorno no Mercado Financeiro



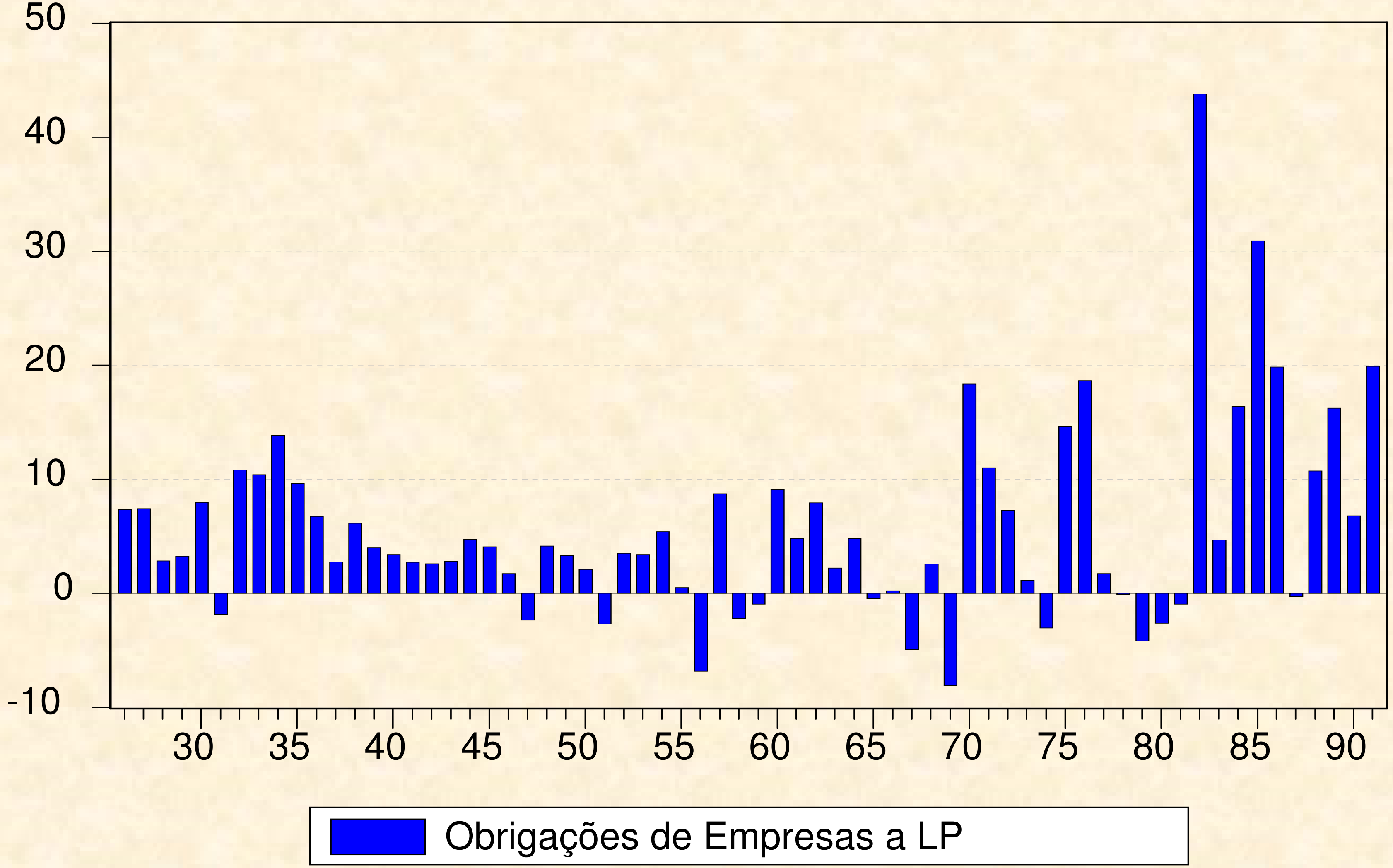
Risco e Retorno no Mercado Financeiro



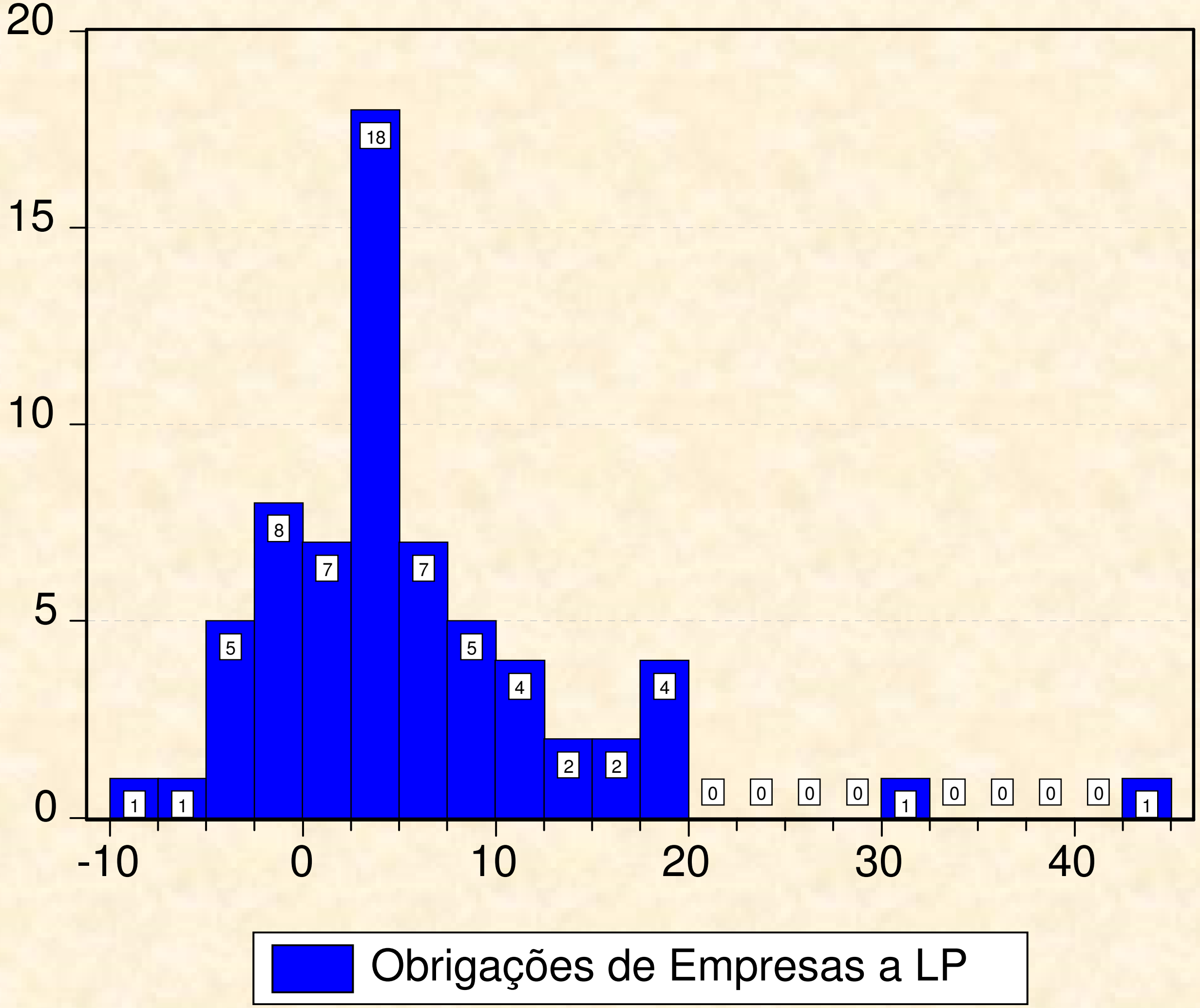
Series: AEM
Sample 1926 1991
Observations 66

Mean	17.48788
Median	18.12500
Maximum	142.8700
Minimum	-58.01000
Std. Dev.	35.29839
Skewness	0.555640
Kurtosis	4.320155
Jarque-Bera	8.188824
Probability	0.016666

Risco e Retorno no Mercado Financeiro



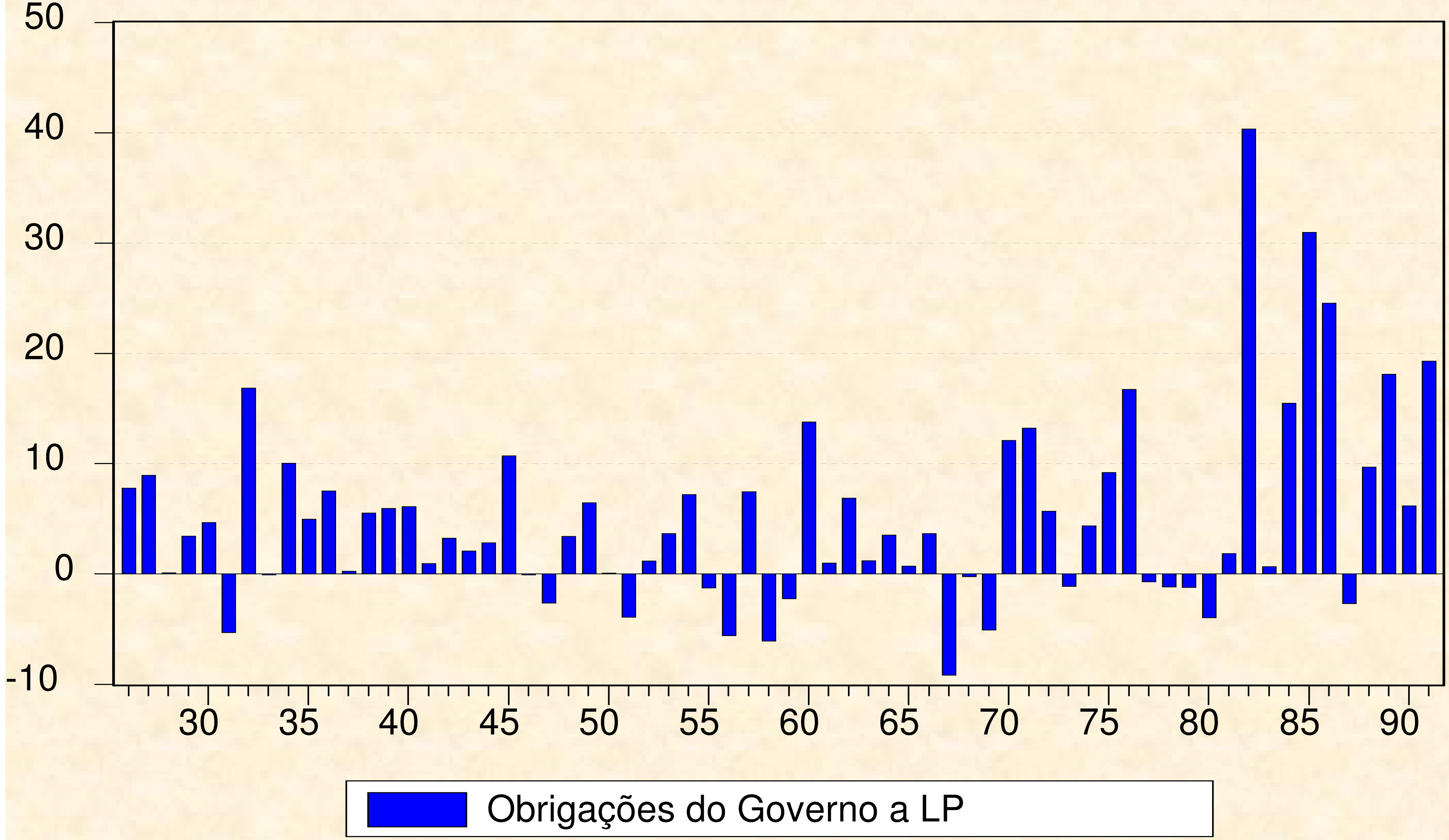
Risco e Retorno no Mercado Financeiro



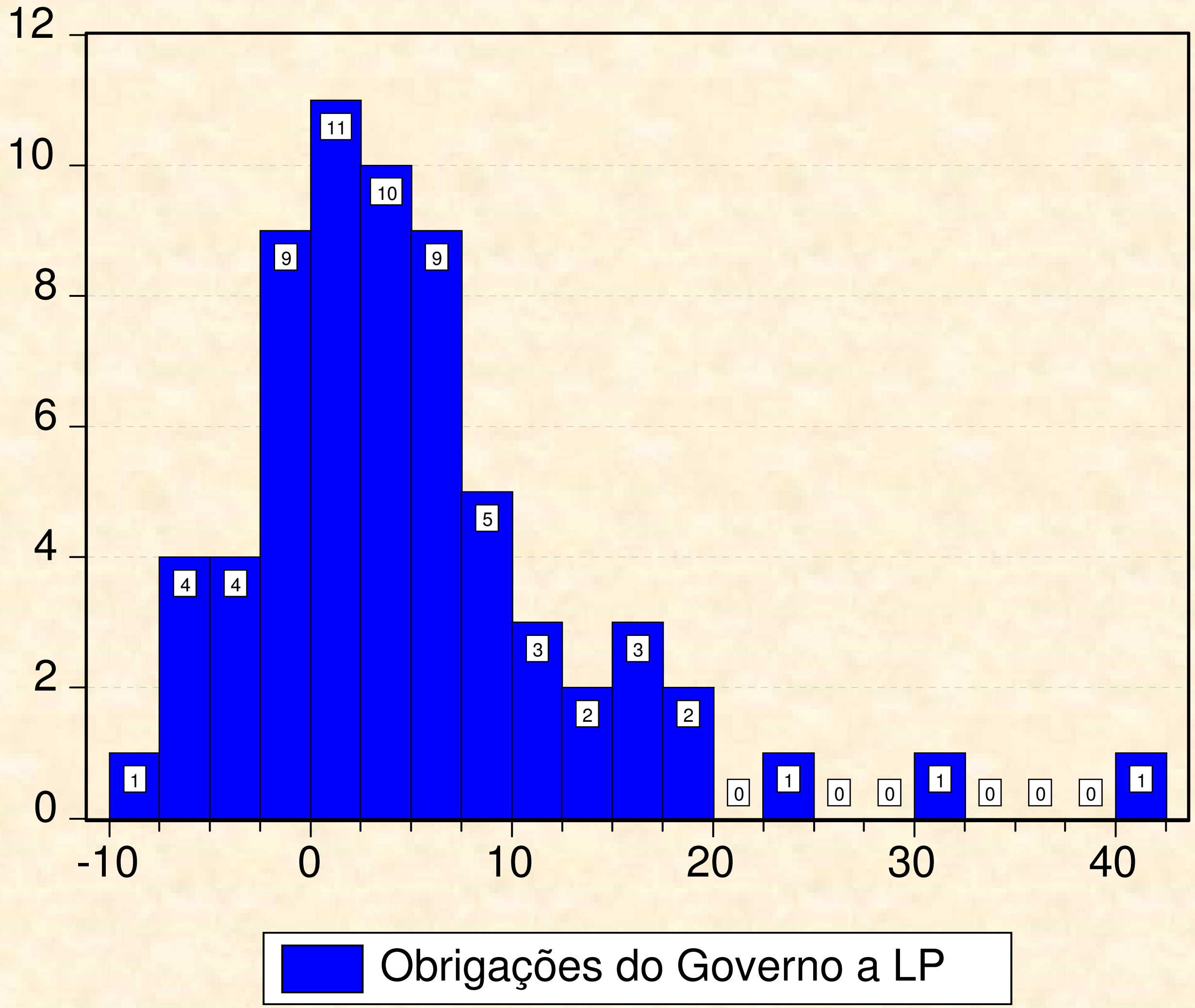
Series: OELP
Sample 1926 1991
Observations 66

Mean	5.732424
Median	3.745000
Maximum	43.79000
Minimum	-8.090000
Std. Dev.	8.527143
Skewness	1.822580
Kurtosis	8.254908
Jarque-Bera	112.4784
Probability	0.000000

Risco e Retorno no Mercado Financeiro



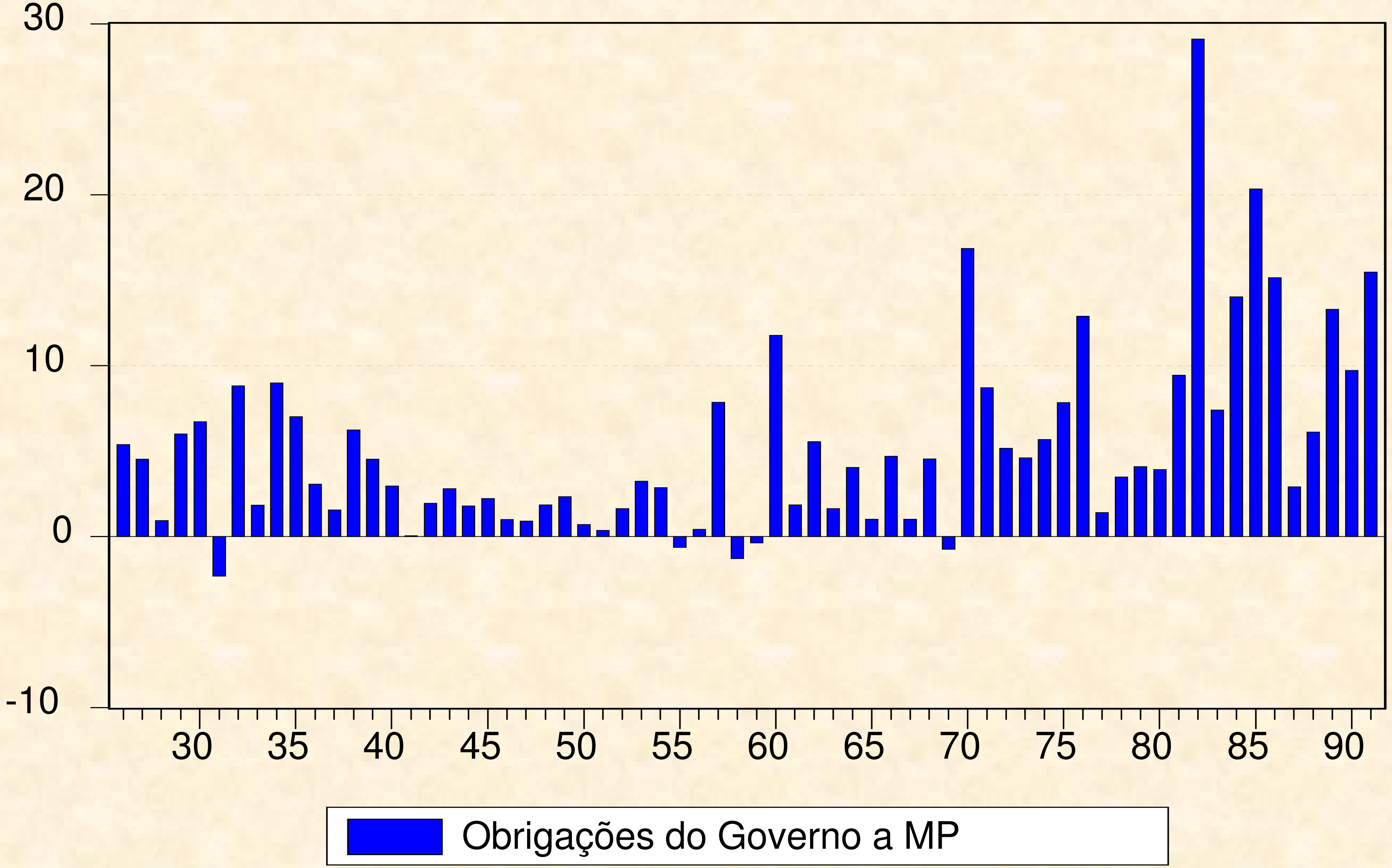
Risco e Retorno no Mercado Financeiro



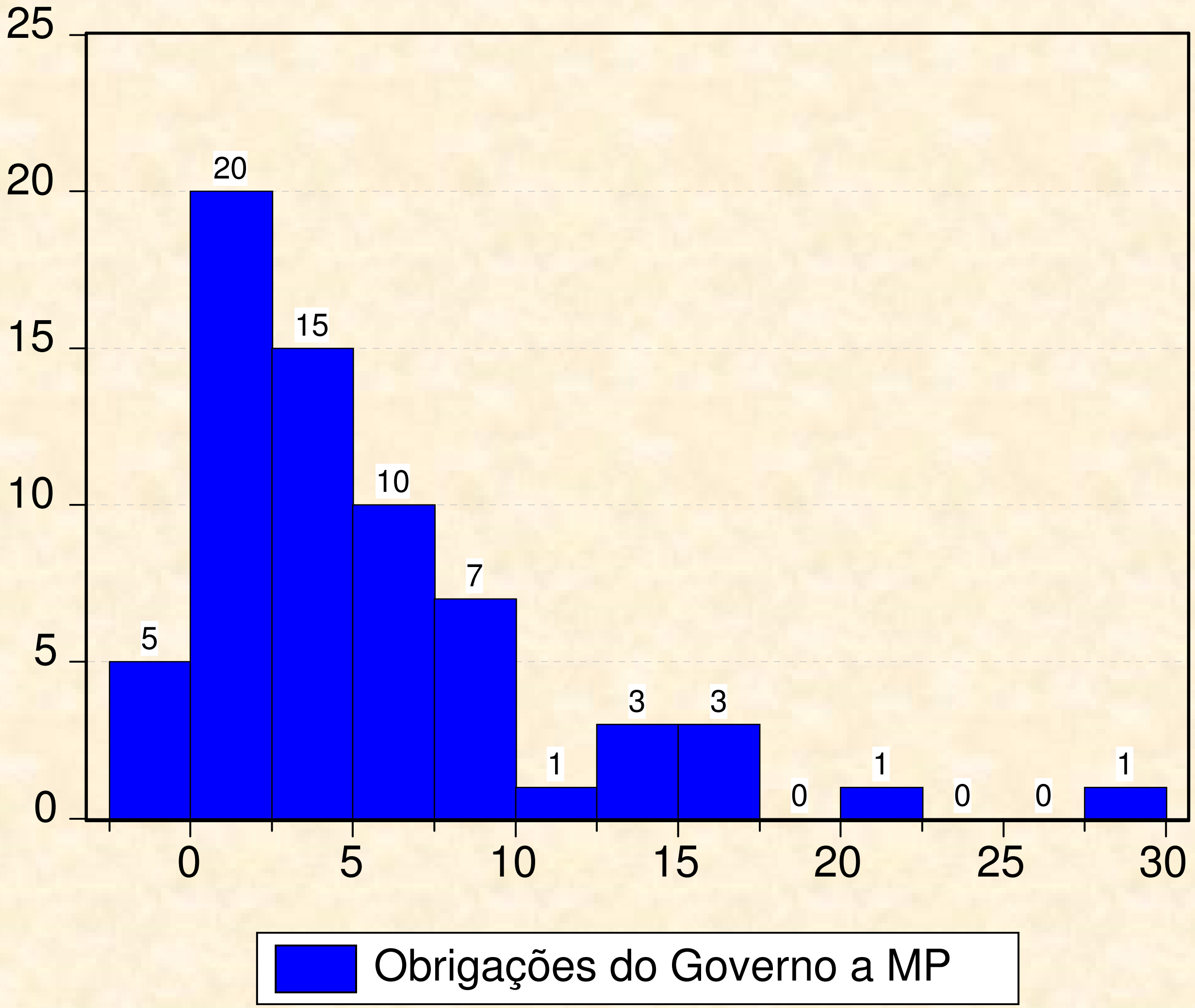
Series: OGLP
Sample 1926 1991
Observations 66

Mean	5.116515
Median	3.465000
Maximum	40.36000
Minimum	-9.180000
Std. Dev.	8.647617
Skewness	1.598709
Kurtosis	6.690632
Jarque-Bera	65.57167
Probability	0.000000

Risco e Retorno no Mercado Financeiro



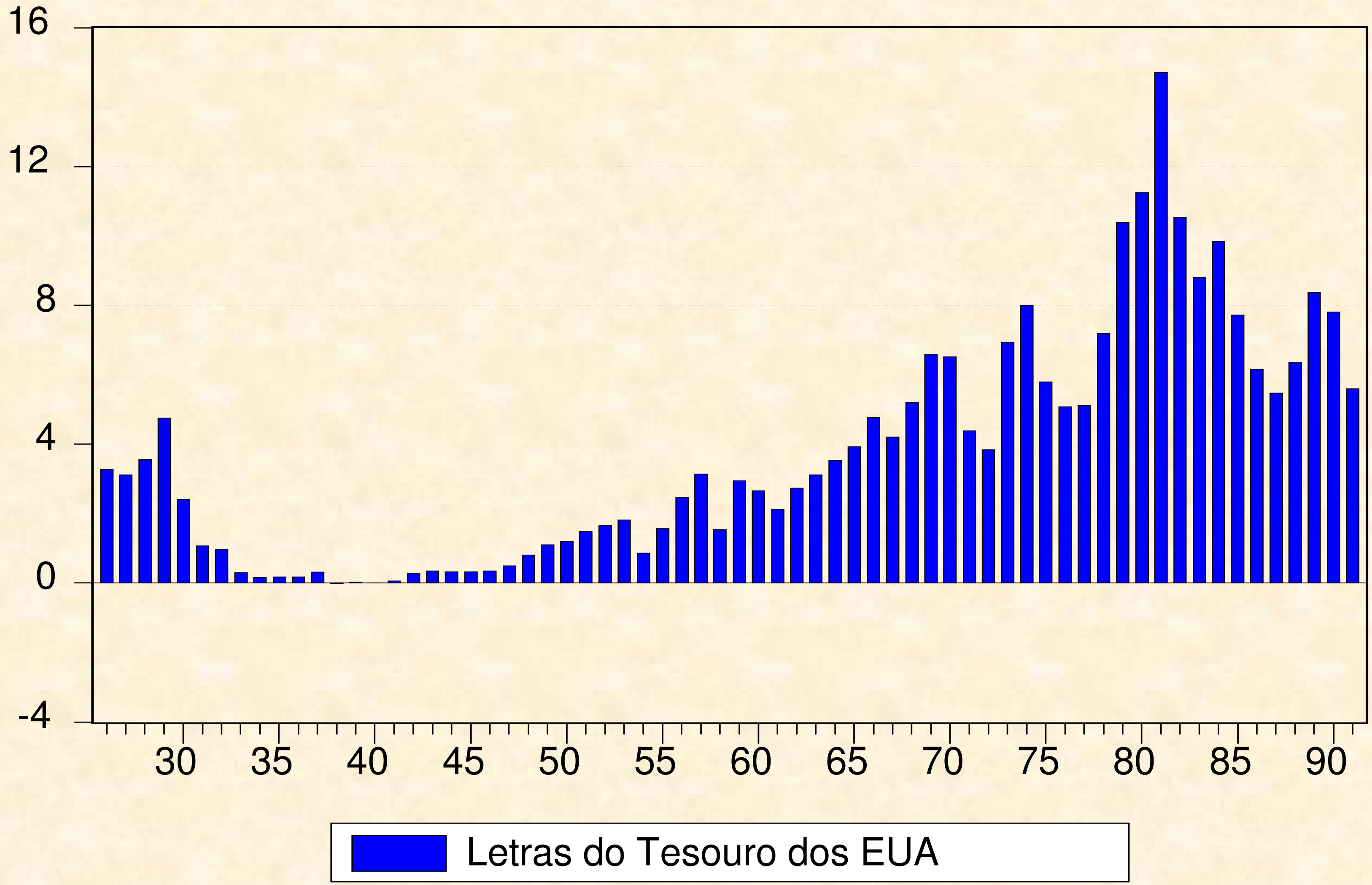
Risco e Retorno no Mercado Financeiro



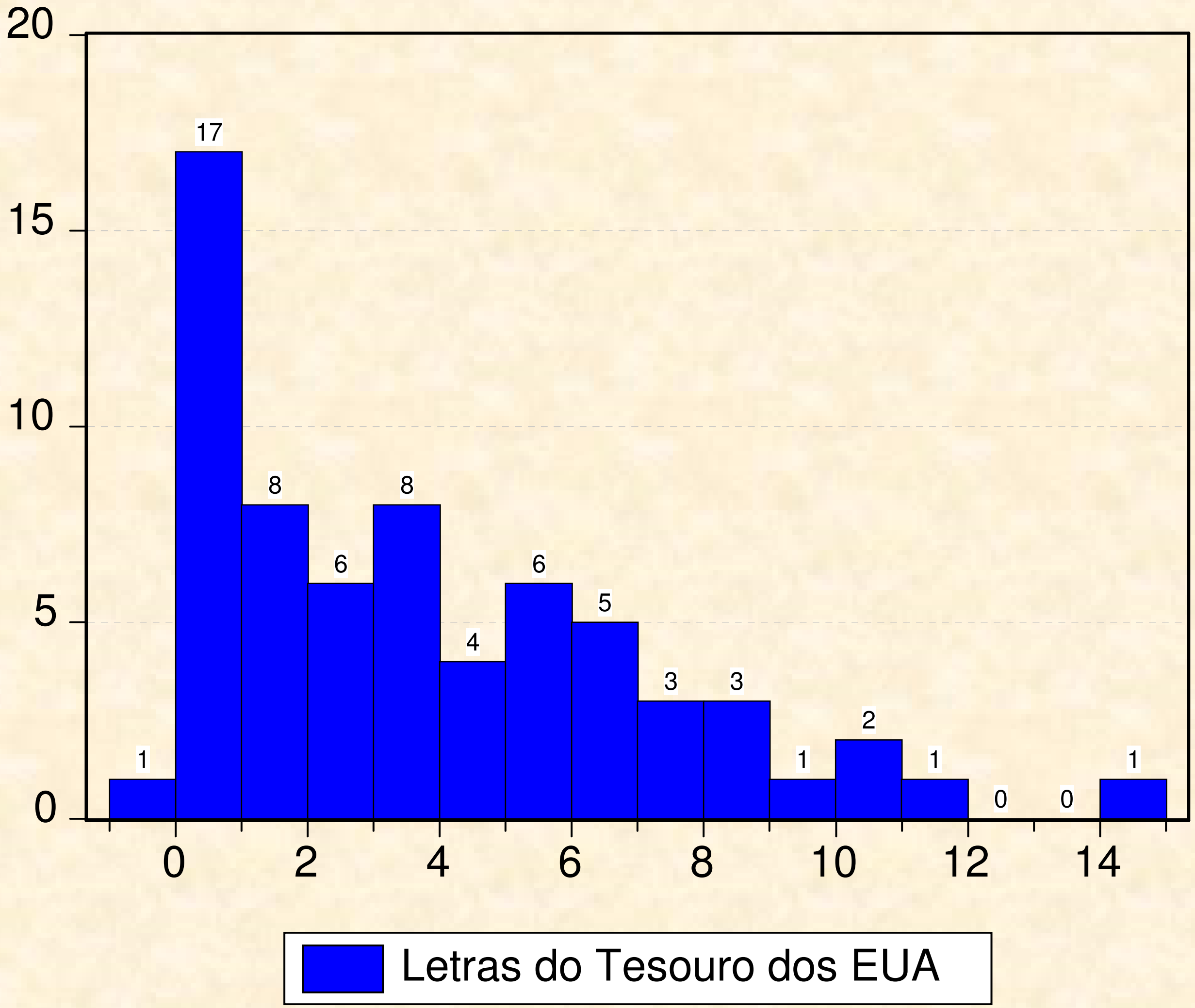
Series: OGMP
Sample 1926 1991
Observations 66

Mean	5.284242
Median	3.975000
Maximum	29.10000
Minimum	-2.320000
Std. Dev.	5.598999
Skewness	1.762068
Kurtosis	7.026832
Jarque-Bera	78.74601
Probability	0.000000

Risco e Retorno no Mercado Financeiro



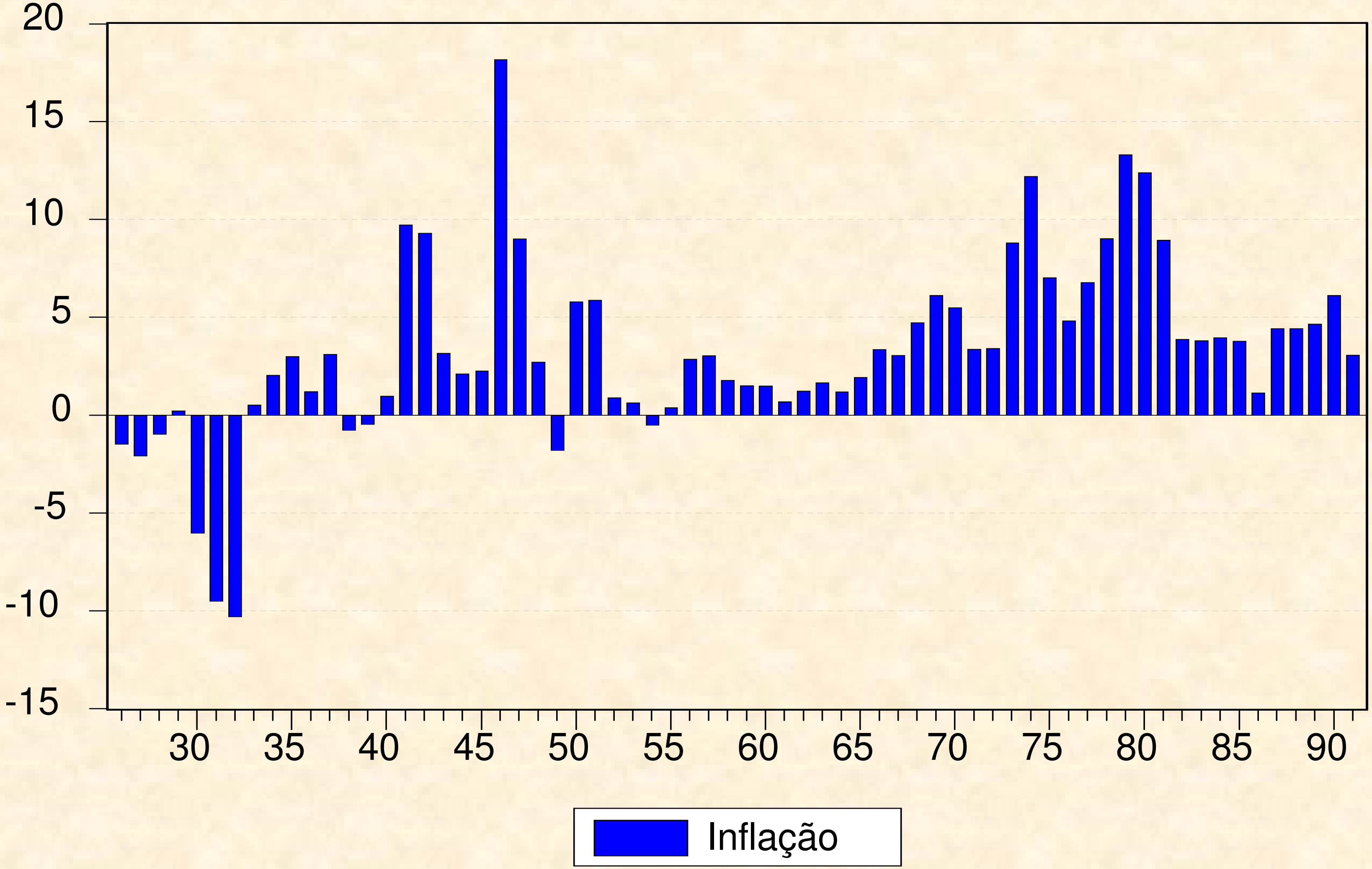
Risco e Retorno no Mercado Financeiro



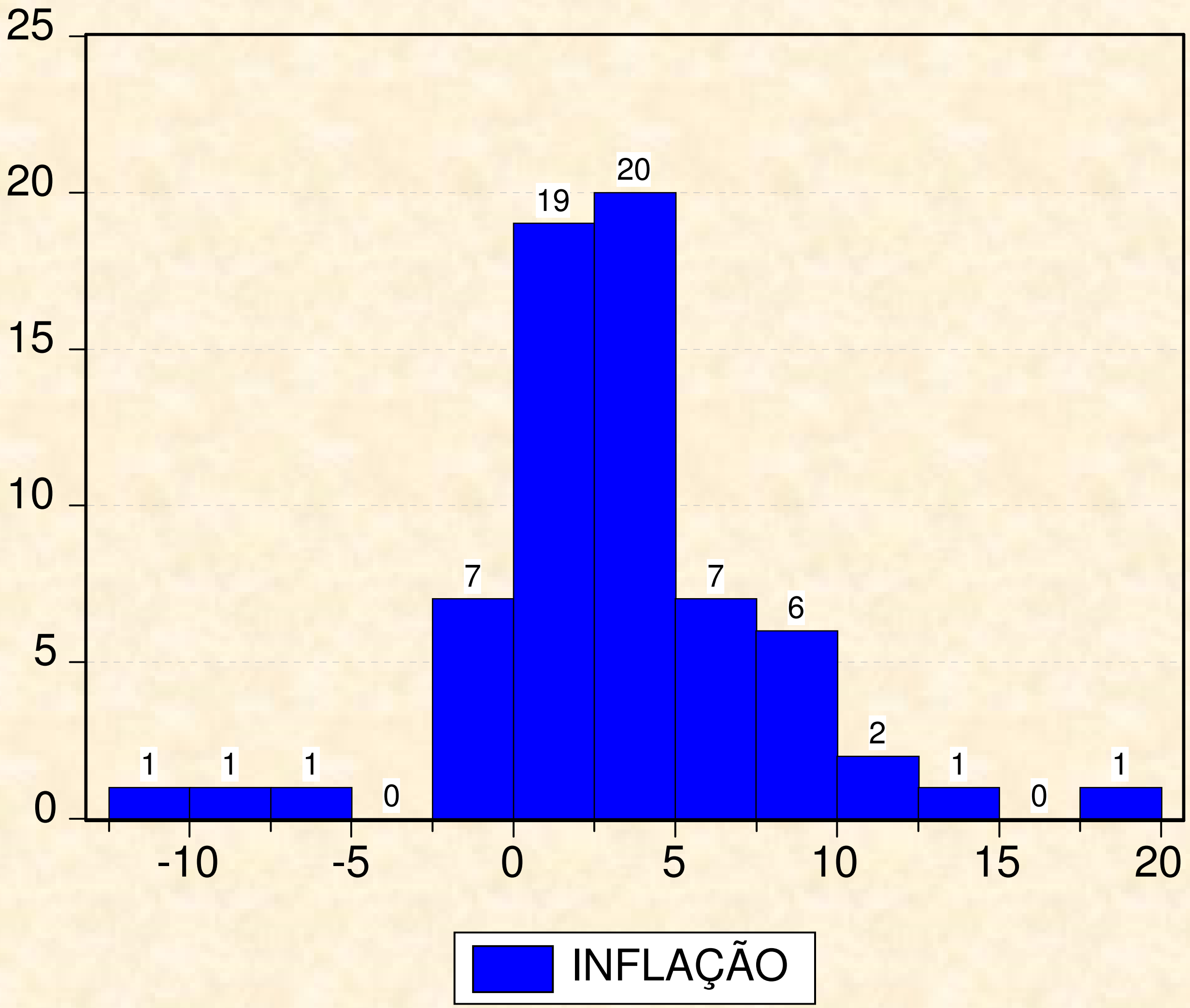
Series: LTEUA
Sample 1926 1991
Observations 66

Mean	3.754242
Median	3.120000
Maximum	14.71000
Minimum	-0.020000
Std. Dev.	3.364393
Skewness	0.944731
Kurtosis	3.444206
Jarque-Bera	10.36031
Probability	0.005627

Risco e Retorno no Mercado Financeiro



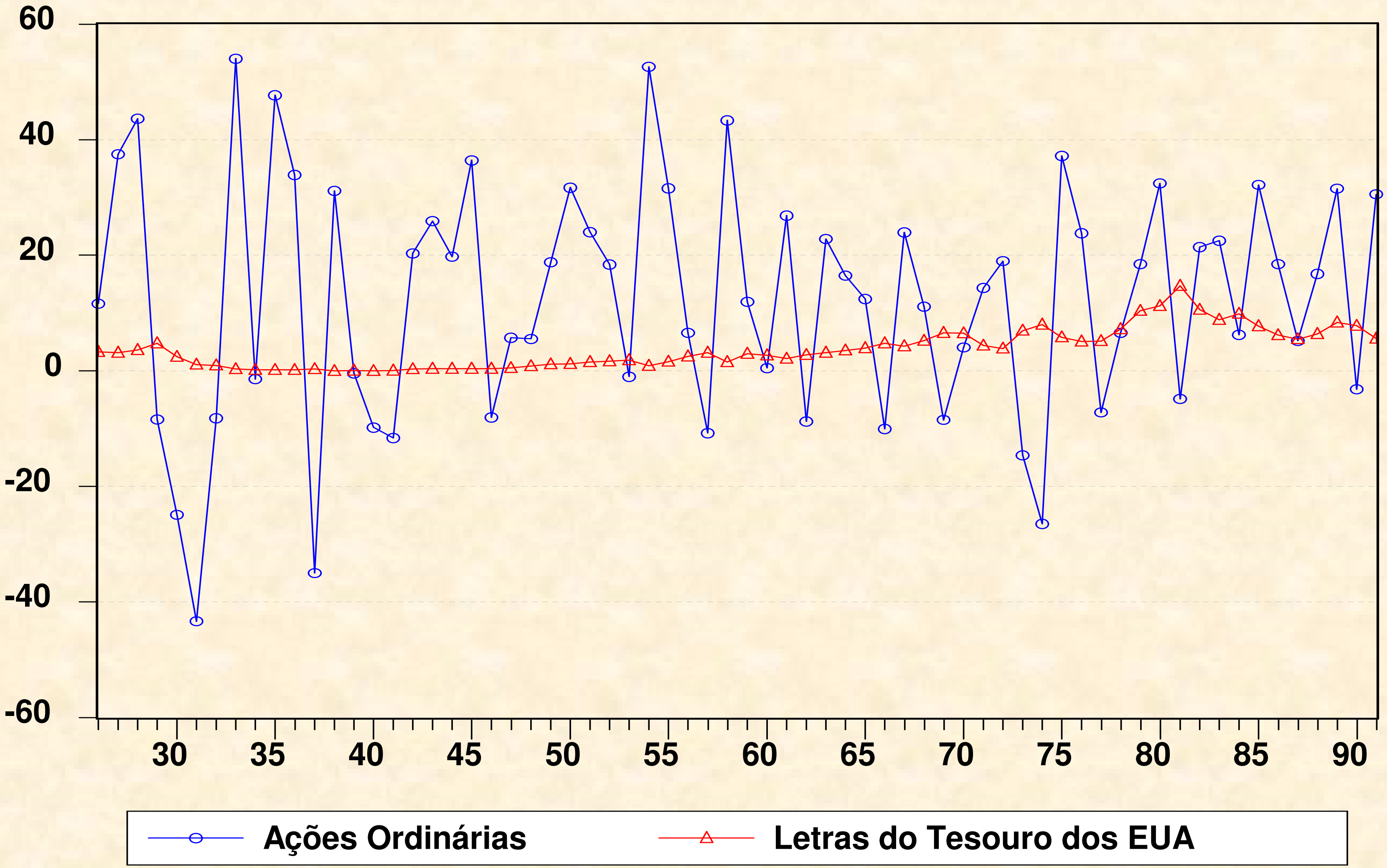
Risco e Retorno no Mercado Financeiro



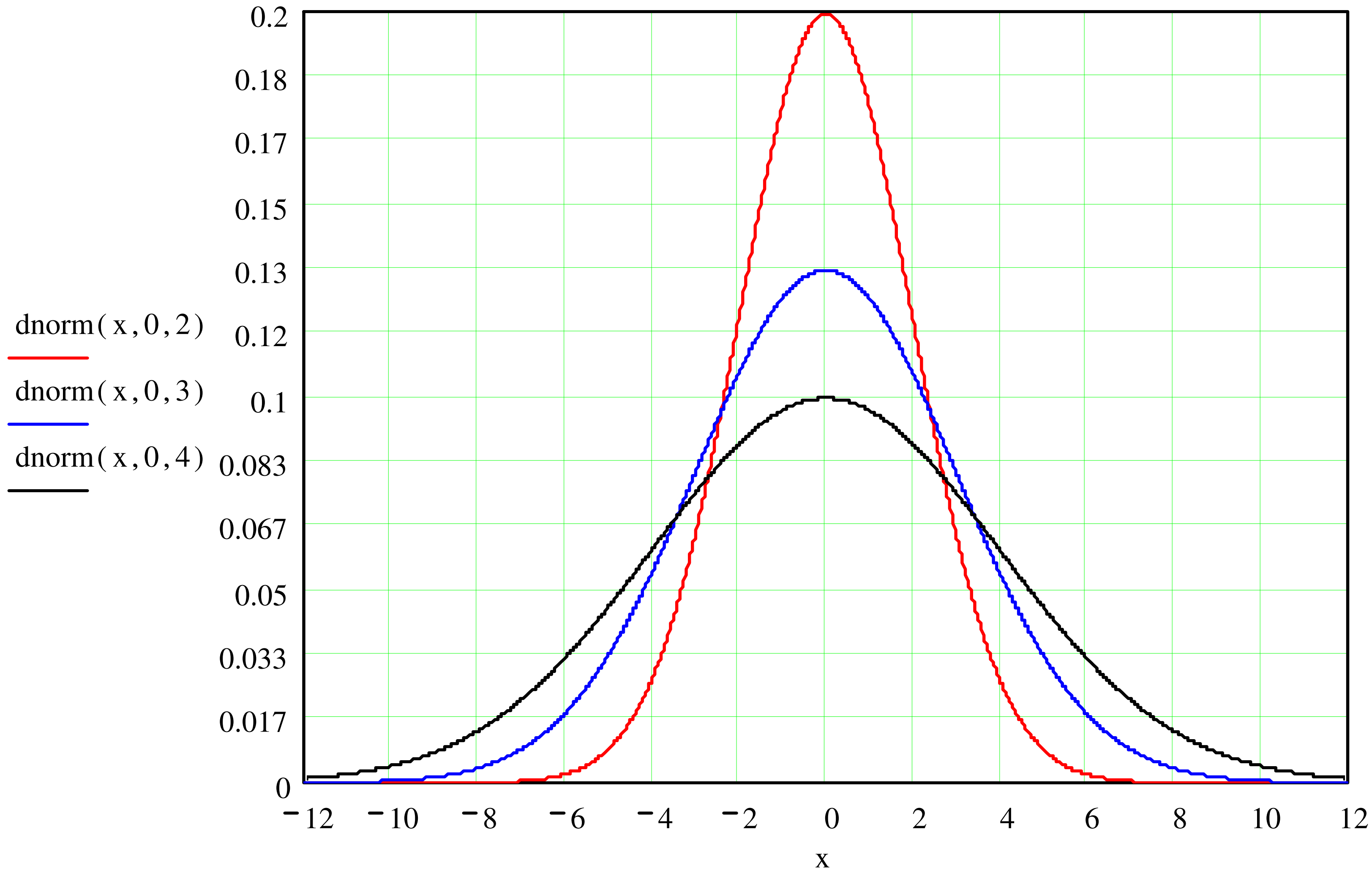
Series: INFLAÇÃO
Sample 1926 1991
Observations 66

Mean	3.275455
Median	3.030000
Maximum	18.16000
Minimum	-10.30000
Std. Dev.	4.677853
Skewness	0.143172
Kurtosis	4.959814
Jarque-Bera	10.78787
Probability	0.004544

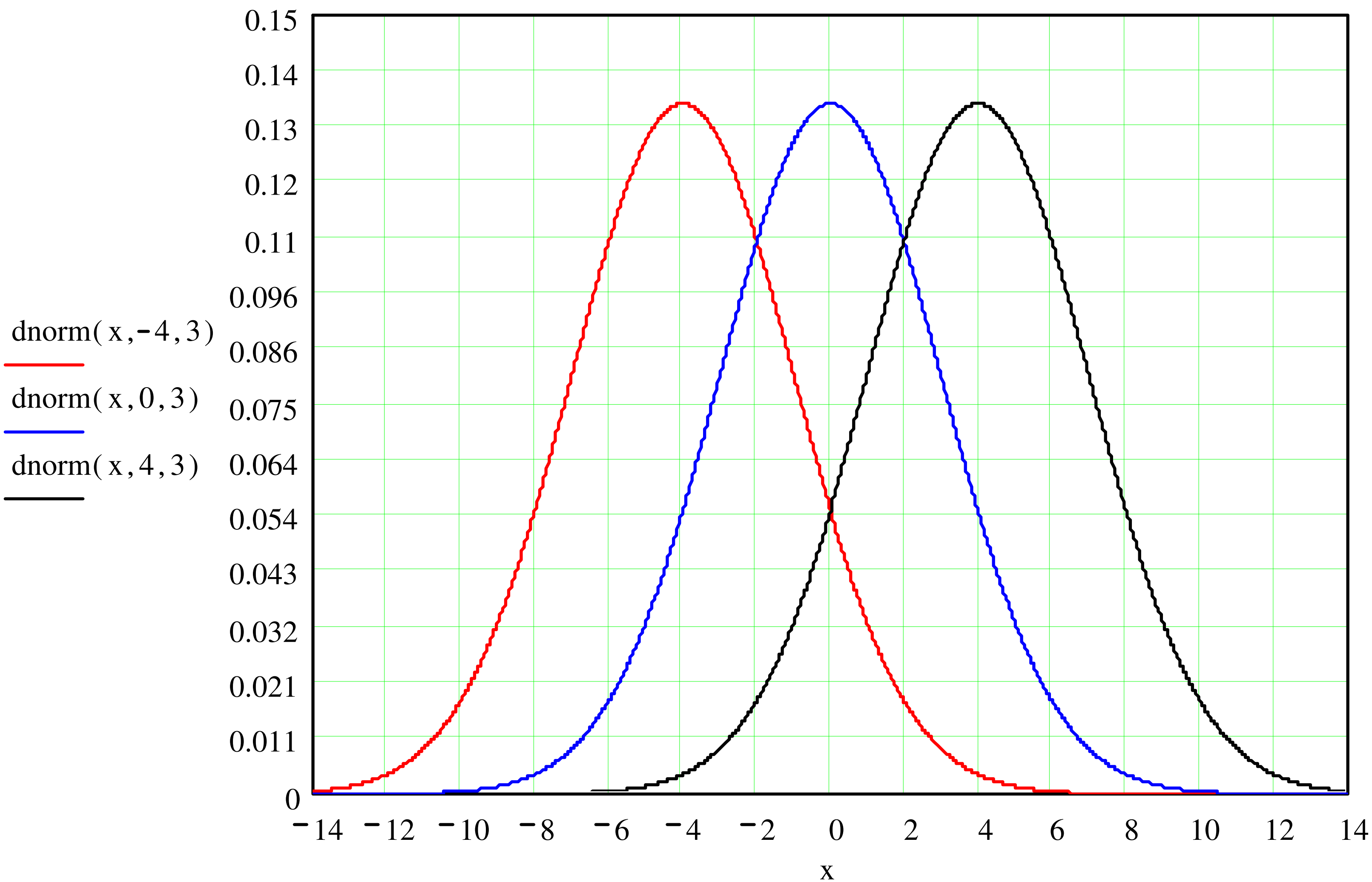
Risco e Retorno no Mercado Financeiro



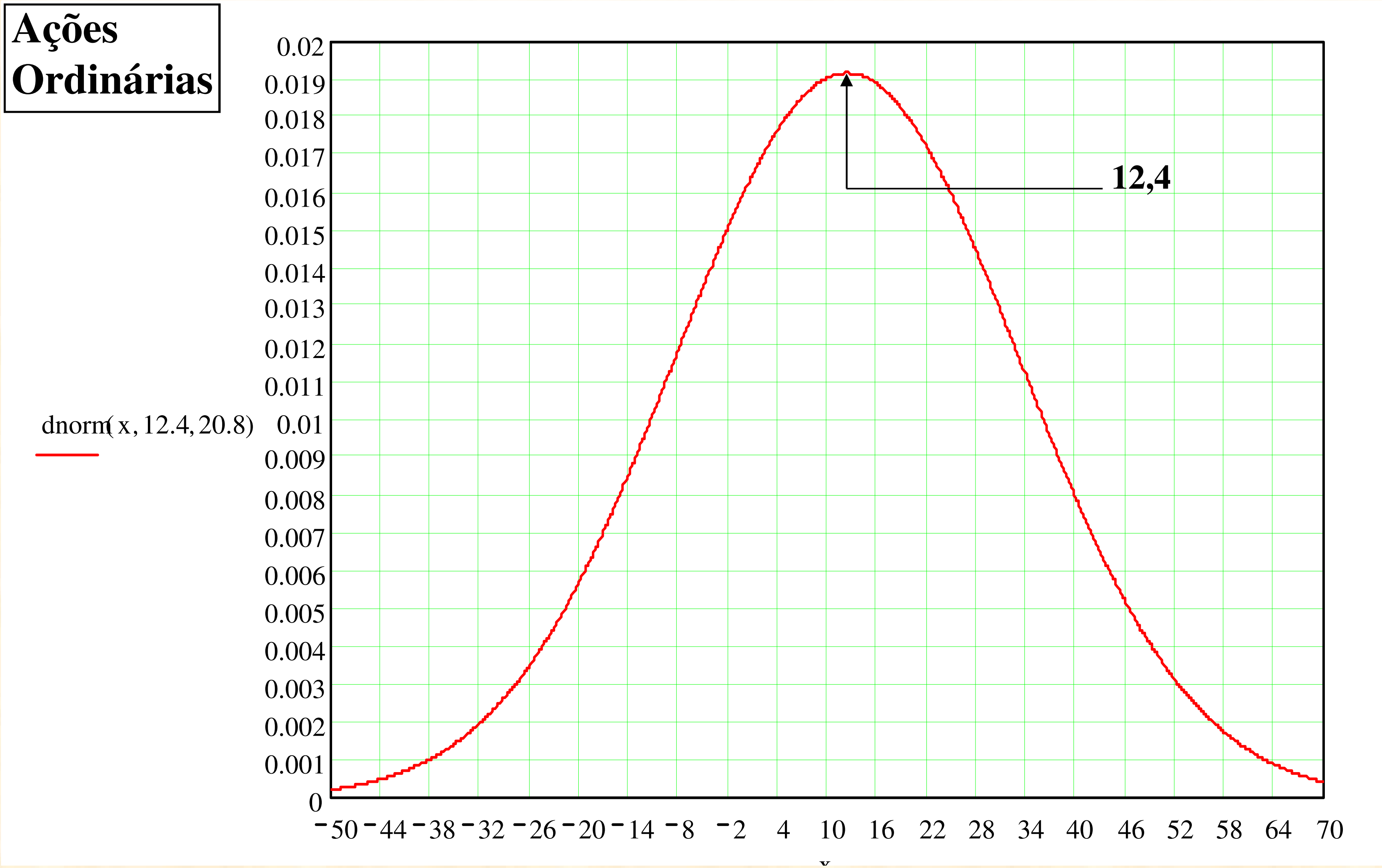
O Desvio Padrão Graficamente



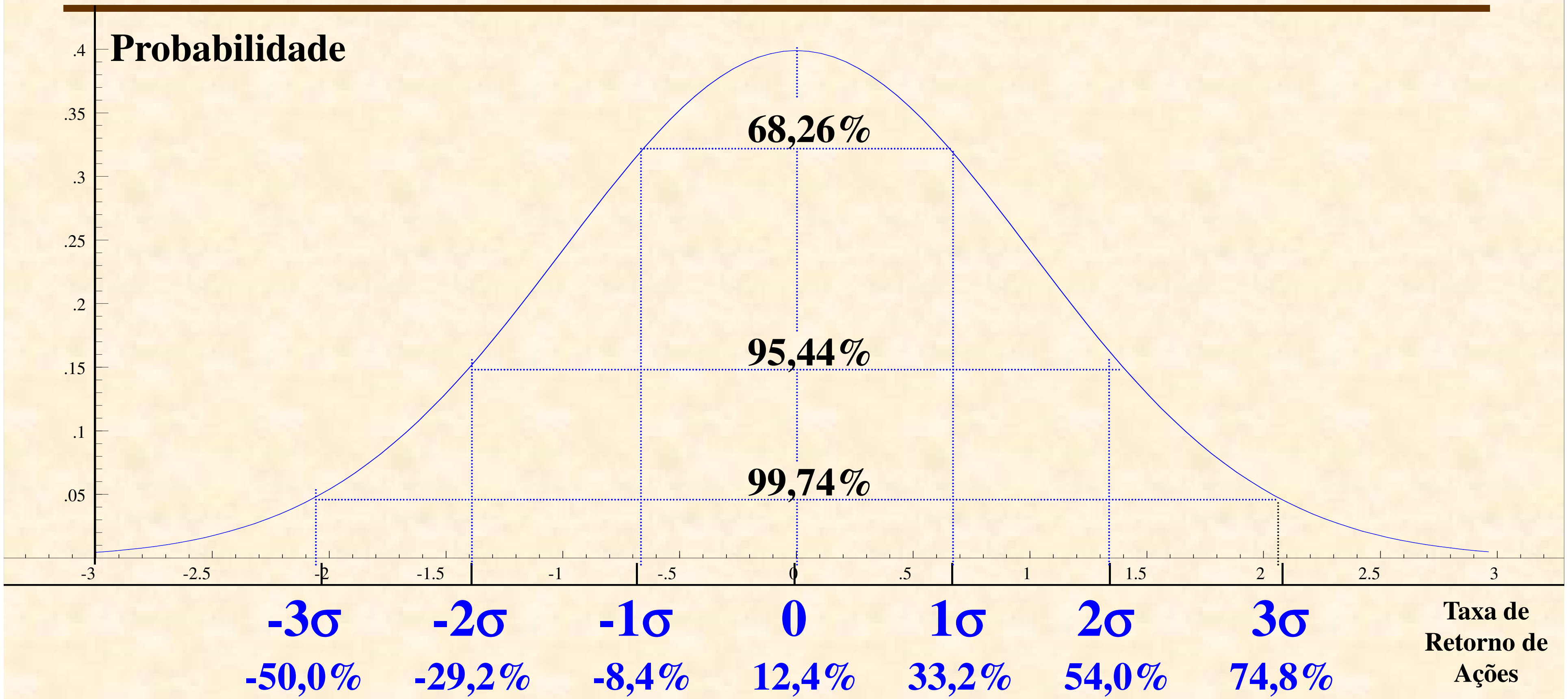
A Média Graficamente



Ações Ordinárias



Retorno das Ações Ordinárias

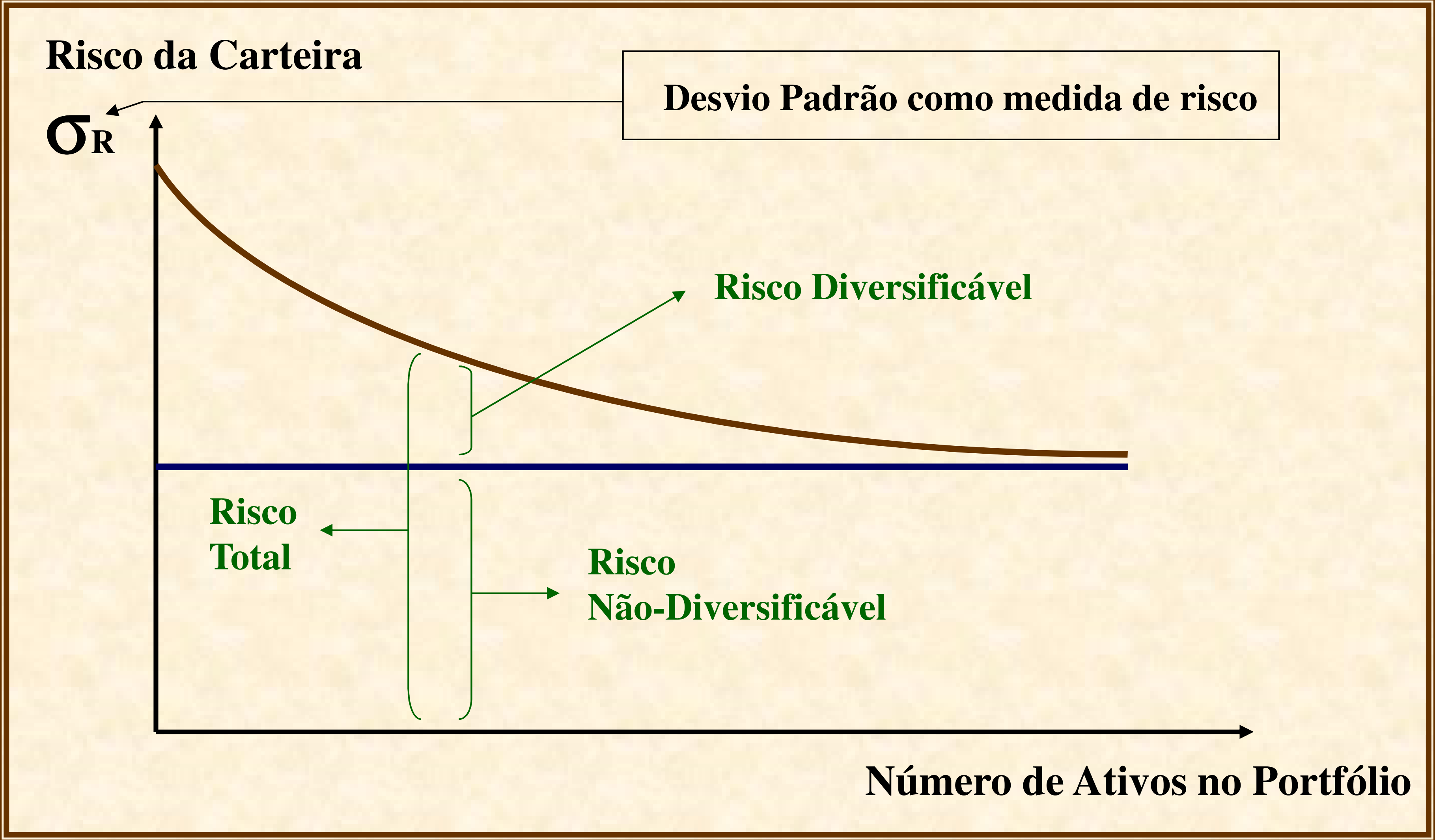


O DP de 20,8% encontrado pode ser interpretado da seguinte maneira:Se os retornos das ações tiverem distribuição aproximadamente normal, a probabilidade de que um retorno se situe a 20,8% da média de 12,4% (entre –8,4% e 33,2%) será igual a cerca de 2/3. Também, aproximadamente 95% dos retornos estarão entre –29,2% e 54%.

CAPM – Capital Asset Pricing Model

- Mede o prêmio de risco para um determinado investimento de capital por meio de uma comparação do retorno esperado de tal investimento com o retorno esperado da totalidade do mercado acionário.
- **Risco e Retorno**
  - **Investir em um Fundo de Ações:**
    - **Ausência de risco diversificável. Existência de risco não-diversificável, pois o mercado acionário tende a acompanhar a situação econômica.**
    - **Consequentemente, o retorno esperado do mercado acionário é mais elevado que a taxa sem risco.**

CAPM – Capital Asset Pricing Model



CAPM – Capital Asset Pricing Model

- Podemos medir o risco não diversificável de um ativo, como, por exemplo, as ações de uma empresa em termos da extensão em que o retorno deste ativo tende a estar correlacionado com o retorno do mercado acionário como um todo. Por exemplo, as ações de uma determinada empresa poderiam não ter nenhuma correlação com o mercado como um todo, de tal forma que ele tivesse pouco ou nenhum risco diversificável. Portanto, o retorno desta ação deveria ser aproximadamente o mesmo da taxa sem risco.

CAPM – Capital Asset Pricing Model

$$R_P = bR_m + (1 - b)R_F$$

- R_F: **Retorno dos Tít. Federais (EUA)**
- R_m: **Retorno do Mercado Acionário**
- R_P: **Retorno Total da Carteira**

Se $R_m = 12\%$, $R_F = 4\%$ e $b = ½$ → **$R_P = 8\%$**

CAPM – Capital Asset Pricing Model

- Qual o grau de risco apresentado por tal carteira de valores ?

$$\boxed{\sigma_P = b\sigma_m}$$

- O desvio padrão da carteira de valores (contendo um ativo de risco e um ativo sem risco) corresponde à fração da carteira com investimentos em ativos de risco, multiplicada pelo desvio padrão de tal investimento.

CAPM – Capital Asset Pricing Model

$$R_P = bR_m + (1-b)R_F \Rightarrow \boxed{R_P = R_F + b\left(R_m - R_F\right)}$$

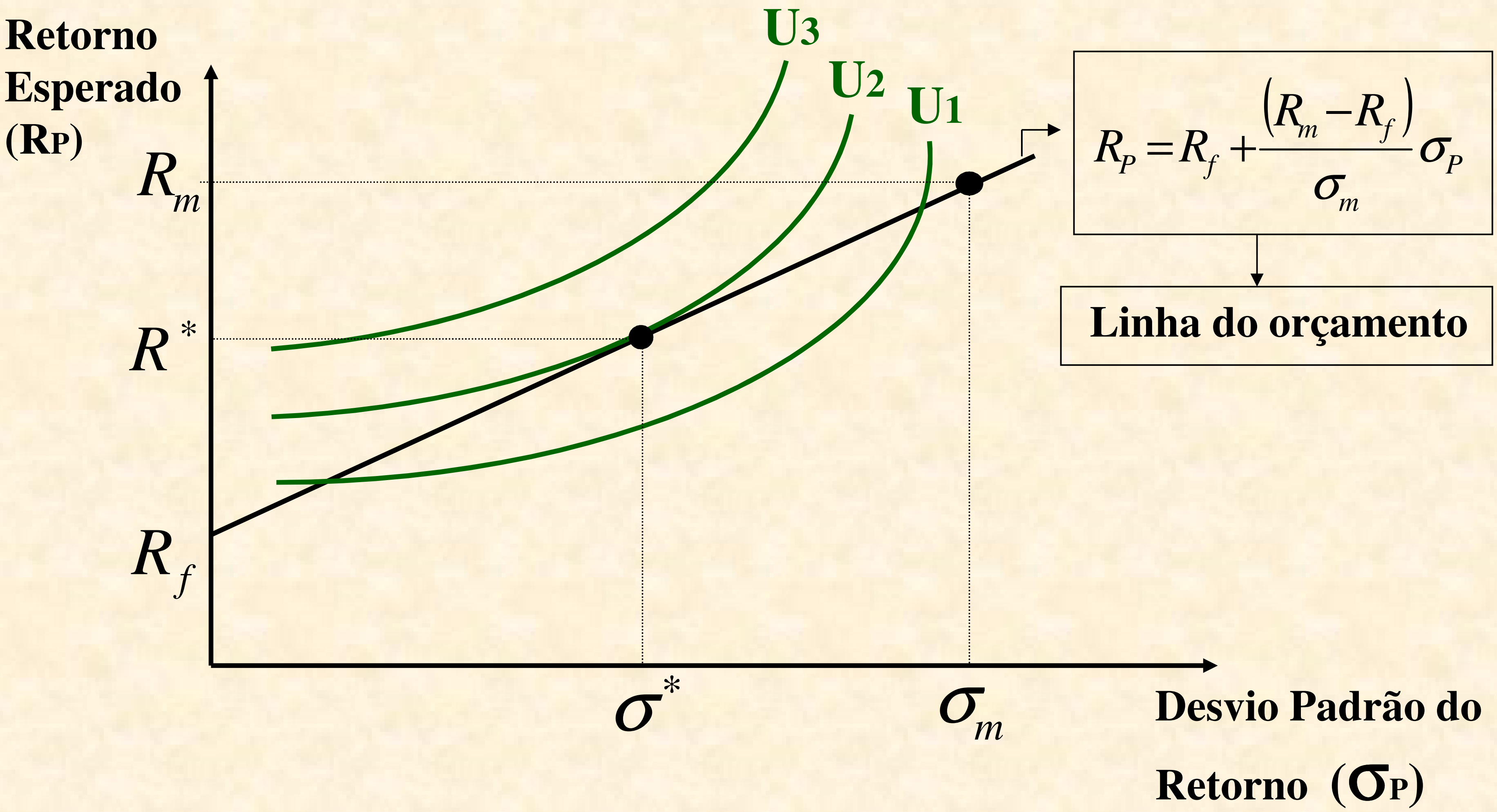
Onde $b = \dfrac{\sigma_P}{\sigma_m}$ **, de forma que:**

$$\boxed{R_P = R_f + \underbrace{\frac{\left(R_m - R_f\right)}{\sigma_m}}\sigma_P}$$

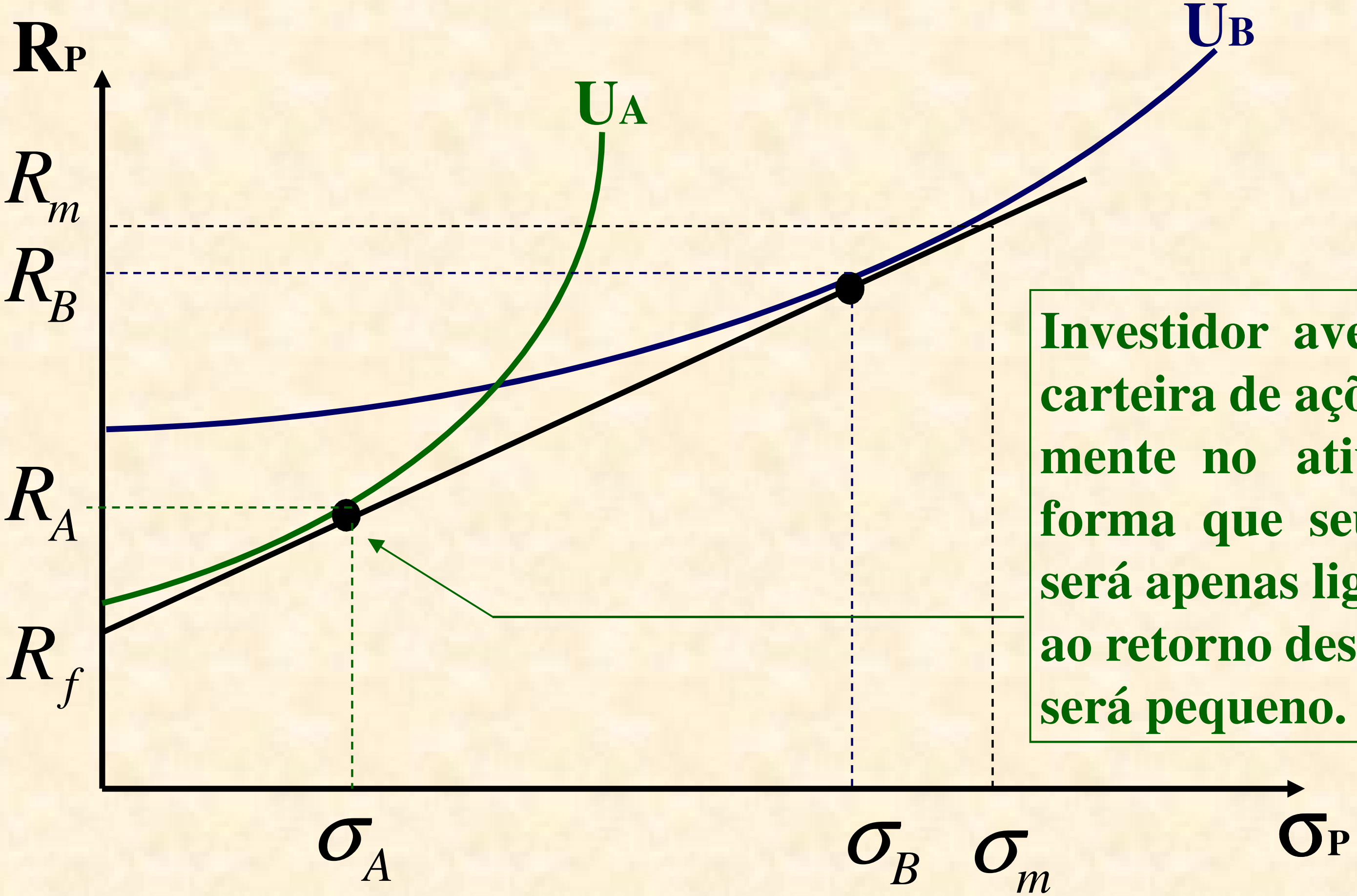
Linha de orçamento que descreve a permuta entre risco e retorno esperado. Note que o retorno esperado da carteira (Rp) aumenta quando aumenta o desvio-padrão (σ_p) desse retorno.

A inclinação da linha de orçamento é denominada preço de risco, pois nos diz em quanto de risco extra um investidor deverá incorrer para que possa desfrutar de um retorno esperado mais elevado

A Escolha Entre Risco e Retorno



As Escolhas de Dois Investidores Diferentes



Investidor avesso ao risco. Sua carteira de ações consiste, basica - mente no ativo livre de risco, de forma que seu retorno esperado será apenas ligeiramente superior ao retorno deste ativo, mas o risco será pequeno.

CAPM – Capital Asset Pricing Model

- Considere o risco não-diversificável associado a um ativo, como, por exemplo, as ações de uma empresa. Podemos medir tal risco por meio da correlação entre o retorno desse ativo e o retorno do mercado acionário como um todo.

CAPM – Capital Asset Pricing Model

- O **CAPM** resume essa relação entre os retornos esperados por meio da seguinte equação:

$$\boxed{R_i - R_F = \beta(R_m - R_F)}$$

  - O prêmio de risco do ativo é proporcional ao prêmio de risco do mercado. O beta mede quão sensível é o retorno do ativo em relação às variações do mercado, medindo portanto o risco não-diversificável do ativo.

CAPM – Capital Asset Pricing Model

- $\beta = 1 \Rightarrow$ Uma elevação de 1% no mercado tende a provocar uma elevação de 1% no preço do ativo.

- $\beta = 2 \Rightarrow$ Uma elevação de 1% no mercado tende a provocar uma elevação de 2% no preço do ativo.

CAPM – Capital Asset Pricing Model

- **Conhecendo o beta do ativo podemos determinar a correta taxa de desconto que deverá ser utilizada no cálculo do valor presente descontado do ativo.**

$$\boxed{\text{Taxa de Desconto}} = \boxed{R_F + \beta\left(R_m - R_F\right)}$$

Retorno Exigido

Prêmio de Risco do Mercado Acionário

Um Exemplo

- Suponha que a ACME Corporation, uma empresa de desenvolvimento de software deseje determinar o retorno exigido sobre um ativo i, que possui um beta de 1,5, sabendo que a taxa dos T-bills é de 7% e o retorno do mercado acionário (medido pelo S&P 500) é de 11%.

$$\underbrace{R_i}_{\text{Taxa Livre de Risco}} = 7\% + \left[1{,}5\left(\underbrace{11\% - 7\%}_{\text{Prêmio de Risco do mercado}}\right)\right] = 7\% + \underbrace{6\%}_{\text{Prêmio de Risco do mercado ajustado pelo beta do ativo}} = \boxed{13\%}$$

Um Exemplo

- O prêmio de risco do mercado quando ajustado pelo índice de risco do ativo (beta), resulta em um prêmio de risco de 6%, que somado à taxa livre de risco de 7%, resulta em um retorno exigido de 13%. Assim, tudo mais constante, quanto maior for o beta do ativo, maior será o retorno exigido.

Estimando Um Beta

- Como o beta nos mostra a sensibilidade dos retornos de um ativo em relação aos retornos do mercado, podemos calculá-lo utilizando dados históricos dos retornos, com o seguinte modelo de regressão linear:

$$\boxed{R_{it} = \alpha_i + \beta_i R_{mt} + e_{it}}$$

Inclinação da reta de mínimos quadrados ordinários

Beta de Um Portfólio

- O beta de um portfólio pode ser facilmente estimado ao se usar betas dos ativos individuais incluídos nele. Sendo w_j a proporção do valor total em unidades monetárias do portfólio representado pelo ativo j, temos:

$$\beta_p = (w_1\beta_1) + (w_2\beta_2) + \ldots + (w_n\beta_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j\beta_j$$

Pepsi X SP 500