Microeconomia

Maximização da Utilidade

Função Utilidade Cobb-Douglas

Prof.: Antonio Carlos Assumpção

Escolha por Parte do Consumidor

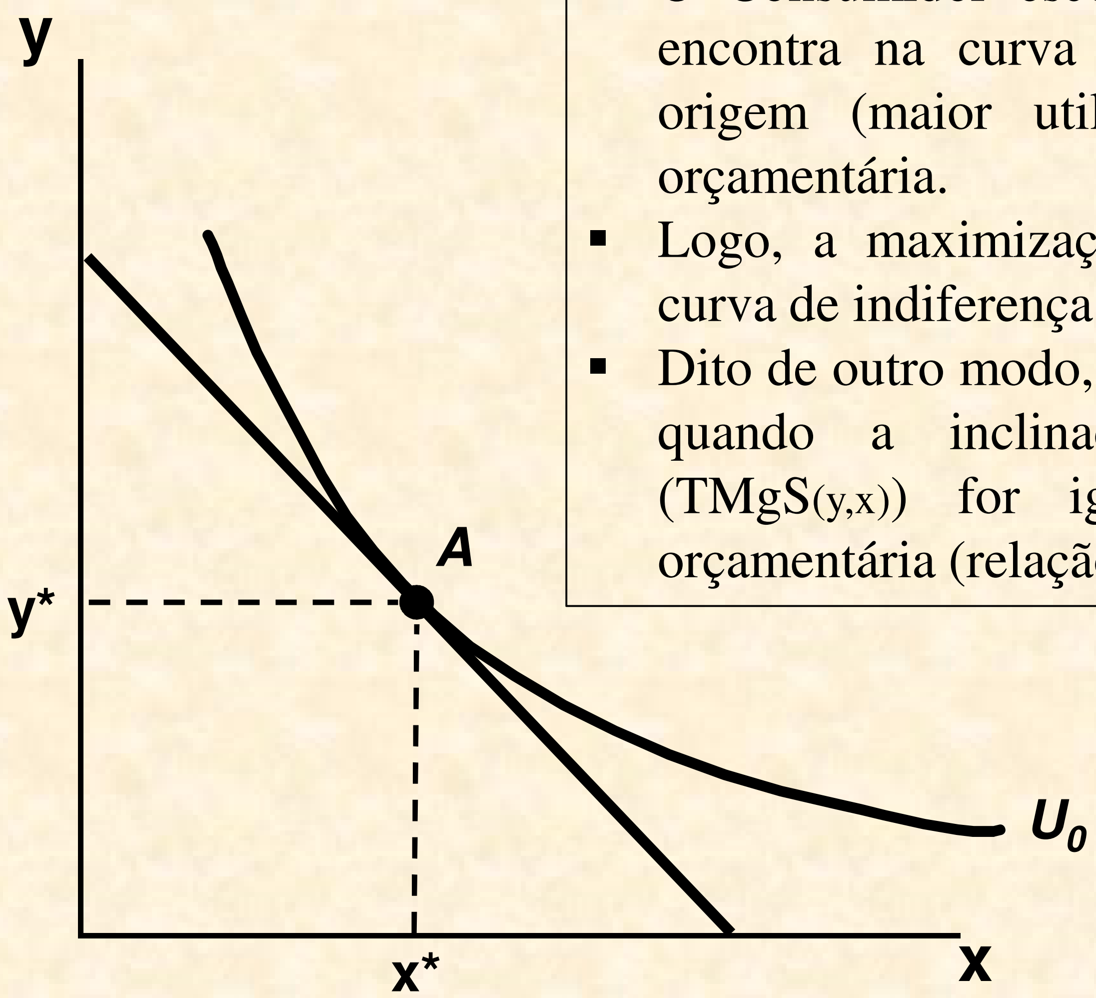
- O consumidor escolhe uma combinação de bens (cesta de consumo) que irá maximizar sua utilidade ou satisfação, que seja compatível com a restrição orçamenmtária com a qual ele se defronta.

- A cesta de mercado maximizadora de utilidade deverá satisfazer duas condições:

1) Ela deverá estar sobre a linha do orçamento.

2) Ela deverá proporcionar ao consumidor sua combinação preferida de bens e serviços, dados os preços e a renda.

Escolha por Parte do Consumidor



- O Consumidor escolhe a cesta de consumo que se encontra na curva de indiferença mais distante da origem (maior utilidade) que satisfaz a restrição orçamentária.
- Logo, a maximização de utilidade ocorre quando a curva de indiferença tangencia a restrição orçamentária.
- Dito de outro modo, a maximização de utilidade ocorre quando a inclinação da curva de indiferença ($TMgS_{(y,x)}$) for igual a inclinação da restrição orçamentária (relação de preços = Px/Py)

Escolha por Parte do Consumidor

- **A inclinação de uma curva de indiferença é a TMgS, ou seja, taxa à qual o consumidor aceita substituir y por x, permanecendo com o mesmo nível de utilidade.**

$$TMgS_{(\mathrm{Y,X})} = -\frac{\Delta Y}{\Delta X} = -\frac{dY}{dX}$$

Derivando a Condição Anterior

- **Dada uma função utilidade, tal que uma curva de indiferença seja representada por U(X;Y) = C, onde C é uma constante que mede o nível de utilidade, se tomarmos a diferencial total, devemos ter:**

$$\frac{\partial U}{\partial X}dX + \frac{\partial U}{\partial Y}dY = 0$$

Variação na utilidade total proveniente de uma variação na quantidade do bem Y.

Variação na utilidade total proveniente de uma variação na quantidade do bem X.

Derivando a Condição Anterior

- **Resolvendo para para dY / dX, a inclinação da curva de indiferença, temos:**

$$\frac{\partial U}{\partial Y} dY = \frac{\partial U}{\partial X} dX \Rightarrow \frac{dY}{dX} = -\frac{\dfrac{\partial U}{\partial X}}{\dfrac{\partial U}{\partial Y}} \Rightarrow \frac{dY}{dX} = -\frac{UMgX}{UMgY} = TMgS_{YX}$$

- **Logo, a TMgS é a razão entre as utilidades marginais de X e Y e é dada pela inclinação da curva de indiferença em um ponto.**

Escolha por Parte do Consumidor

- **A inclinação da restrição orçamentária é dada pela relação de preços, que mostra quanto o consumidor deve ceder de um bem para adquirir uma unidade do outro bem.**

Restrição Orçamentária →

$$I = P_X X + P_Y Y \Rightarrow Y = \frac{I}{P_Y} - \frac{P_X}{P_Y} X$$

$$Inclinação\ da\ R.O. = -\frac{P_X}{P_Y}$$

Escolha por Parte do Consumidor

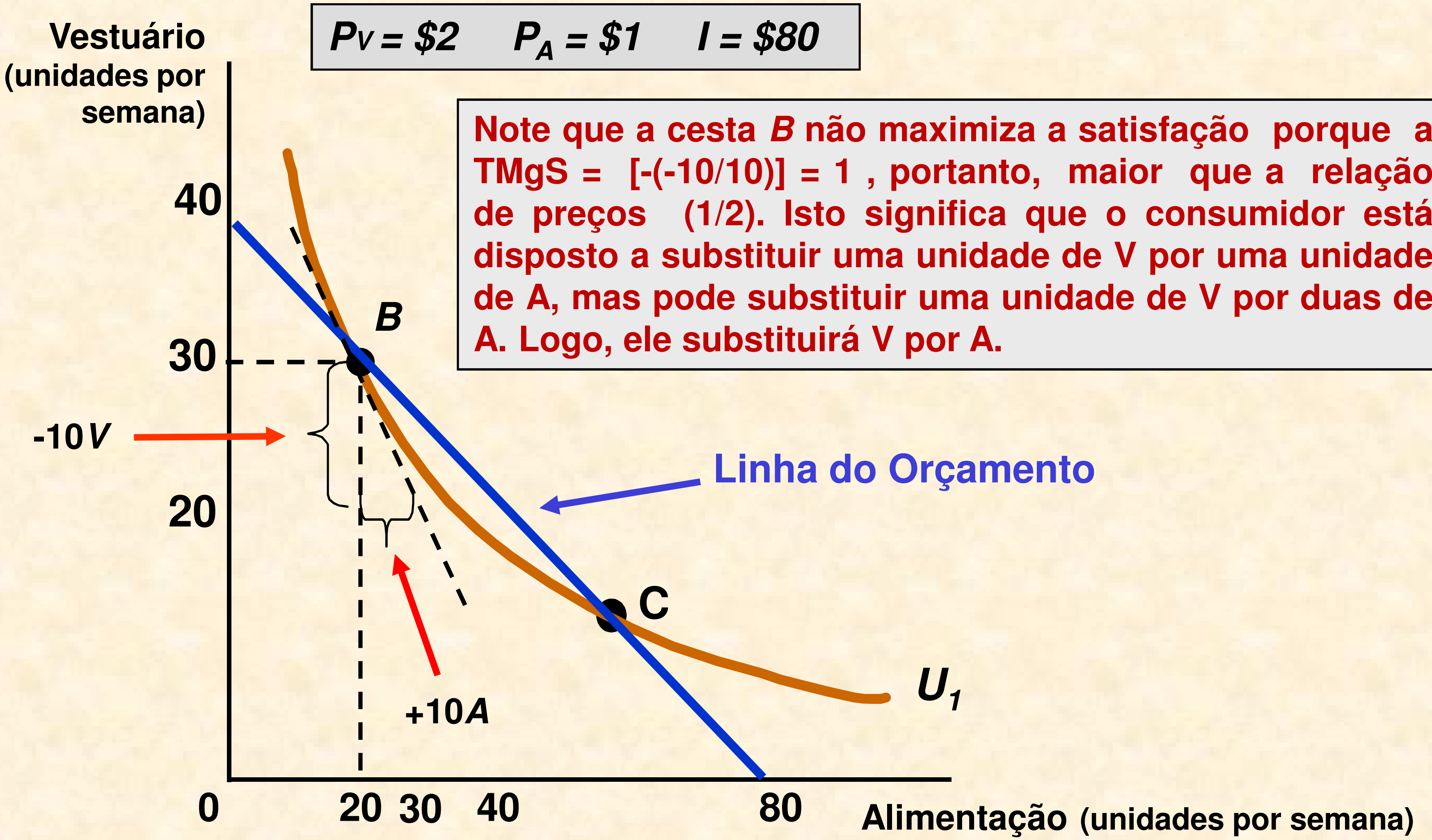
- Portanto, pode ser dito que utilidade é maximizada quando:

$$TMgS_{(Y,X)} = \frac{P_X}{P_Y}$$

Note que, taxa marginal de substituição quanto a inclinação da R.O. são negativas.

- A escolha maximizadora de utilidade ocorre quando a taxa marginal de substituição se iguala a relação de preços, ou seja, quando a inclinação da curva de indiferença é igual a inclinação da restrição orçamentária.

Escolha por Parte do Consumidor



Note que a cesta *B* não maximiza a satisfação porque a TMgS = [-(-10/10)] = 1 , portanto, maior que a relação de preços (1/2). Isto significa que o consumidor está disposto a substituir uma unidade de V por uma unidade de A, mas pode substituir uma unidade de V por duas de A. Logo, ele substituirá V por A.

Escolha por Parte do Consumidor

- Se o consumidor escolhe a cesta b ou a cesta C , ele gasta toda a sua renda. Porém, ele poderia atingir um nível de utilidade mais elevado escolhendo uma cesta intermediária entre B e C . Dito de outra forma, a diversificação (no caso de uma função utilidade Cobb-Douglas) proporciona mais utilidade ao consumidor.

Um Exemplo

- Suponha que a função utilidade de um consumidor possa ser representada por:

$$U_{(Y,X)} = Y^{0,5} X^{0,5}$$

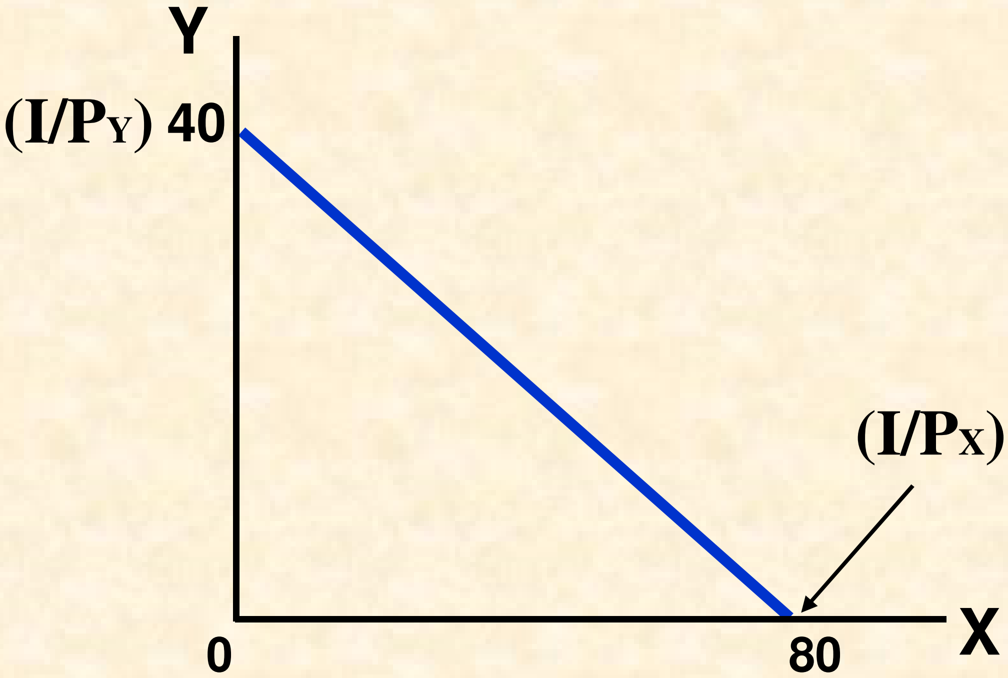
  - Note que a representação acima implica que o consumidor gosta igualmente de ambos os bens (a variação de utilidade proveniente de uma unidade adicional de vestuário é igual a variação de utilidade proveniente de uma unidade adicional de alimentação).

- Sua renda monetária é dada por I = 80 e os preços são $P_Y = 2$ e $P_X = 1$.

Um Exemplo

- **A Restrição Orçamentária**

$$I = P_Y Y + P_X X \Rightarrow Y = \frac{I}{P_Y} - \frac{P_X}{P_Y} X \Rightarrow \boxed{Y = 40 - \frac{1}{2} X}$$



Um Exemplo

- **A Escolha Ótima**

$$U_{(Y,X)} = Y^{0,5} X^{0,5}$$ **Pode ser escrita como:** $$U_{(Y,X)} = \sqrt{Y}\sqrt{X}$$

$$TMgS_{(Y,X)} = -\frac{dY}{dX} = -\frac{\frac{\partial U}{\partial X}}{\frac{\partial U}{\partial Y}} = -\frac{\sqrt{Y}\frac{1}{2\sqrt{X}}}{\sqrt{X}\frac{1}{2\sqrt{Y}}} = -\frac{\sqrt{Y}}{2\sqrt{X}}\frac{2\sqrt{Y}}{\sqrt{X}} \Rightarrow \boxed{TMgS_{(Y,X)} = -\frac{Y}{X}}$$

OBS.

Se $Y = \sqrt{X} \Rightarrow \frac{dY}{dX} = \frac{1}{2\sqrt{X}}$

Um Exemplo

- Igualando a TMgS$_{YX}$ à relação de preços e substituindo o resultado na restrição orçamentária temos:

$$\boxed{-\frac{Y}{X}} = \boxed{-\frac{1}{2}} \Rightarrow Y = \frac{1}{2}X \Rightarrow \frac{1}{2}X = 40 - \frac{1}{2}X \Rightarrow \boxed{X = 40 \Rightarrow Y = 20}$$

TMgS$_{YX}$

Relação de Preços

Quantidades de Y e X que maximizam a utilidade do consumidor.

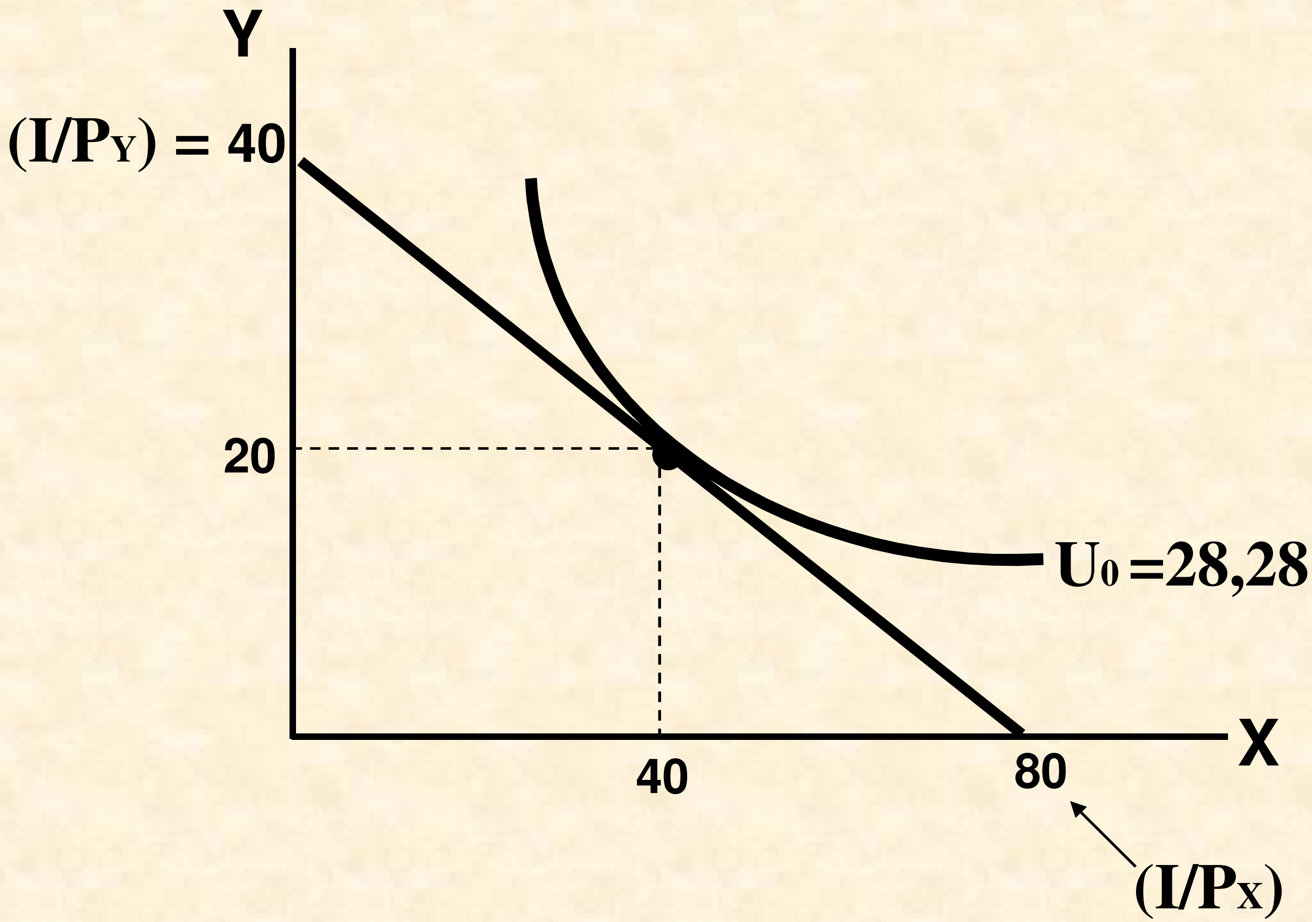
Um Exemplo

- Podemos checar o resultado, calculando a utilidade gerada pelo consumo da cesta (20;40).

$$U_{(20;40)} = 20^{0,5}40^{0,5} = \boxed{28{,}28}$$

Não existe qualquer outra cesta que dê ao consumidor uma utilidade maior que esta.

Um Exemplo



Extensões: Utilizando o Lagrangeano

- Demandas de Uma Função Cobb-Douglas

$$U(x, y) = x^{\alpha} y^{\beta}$$

$$Logo, \quad o \quad lagrangeano \rightarrow \Im = x^{\alpha} y^{\beta} + \lambda\left(I - P_x x - P_y y\right)$$

$$Cond. \quad de \quad primeira \quad ordem:$$

$$\frac{\partial \Im}{\partial x} = 0 \Rightarrow \alpha x^{\alpha-1} y^{\beta} - \lambda P_x = 0$$

$$\frac{\partial \Im}{\partial y} = 0 \Rightarrow \beta x^{\alpha} y^{\beta-1} - \lambda P_y = 0$$

$$\frac{\partial \Im}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow I - P_x x - P_y y = 0$$

$$Logo: \quad \frac{\alpha y}{\beta x} = \frac{P_x}{P_y} \Rightarrow P_y y = \frac{\beta}{\alpha} P_x x$$

Extensões: Utilizando o Lagrangeano

$$Logo: \quad \frac{\alpha y}{\beta x} = \frac{P_x}{P_y} \Rightarrow P_y y = \frac{\beta}{\alpha} P_x x$$

Substituindo na R.O.I.

$$I = P_x x + P_y y \Rightarrow P_x x + \frac{\beta}{\alpha} P_x x = I \Rightarrow P_x x\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) = I \Rightarrow \frac{I}{P_x x} = 1 + \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\frac{I}{P_x x} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha} \Rightarrow P_x x = \frac{I}{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}} \Rightarrow \boxed{x^* = \frac{\alpha}{(\alpha+\beta)} \frac{I}{P_x}} \quad e \quad \boxed{y^* = \frac{\beta}{(\alpha+\beta)} \frac{I}{P_y}}$$

$$\boxed{Se \quad (\alpha+\beta) = 1} \Rightarrow \boxed{x^* = \frac{\alpha I}{P_x}}$$

$$\boxed{Se \quad \alpha = \beta = 0,5} \Rightarrow \boxed{x^* = \frac{I}{2P_x}} \quad ; \quad analogamente: \boxed{y^* = \frac{I}{2P_y}}.$$

Extensões: Utilizando o Lagrangeano

Observação Importante

- Note que as funções de demanda por x e y, derivadas de uma função utilidade Cobb-Douglas, são dadas por

$$U_{(x,y)} = x^{\alpha} y^{\beta} \Rightarrow \boxed{x^{*} = \frac{\alpha}{(\alpha+\beta)} \frac{I}{P_x}} \; e \; \boxed{y^{*} = \frac{\beta}{(\alpha+\beta)} \frac{I}{P_y}}$$

- Sendo assim:
  - Proporção da renda gasta com x = $\left[\alpha / (\alpha + \beta)\right]$
  - Proporção da renda gasta com y = $\left[\beta / (\alpha + \beta)\right]$

Extensões: Utilizando o Lagrangeano

- Exemplificando:
  - Suponha que $U_{(x,y)} = x^{0,4} y^{0,6}$
    - Logo, 40% da renda será gasta com o bem x e 60% da renda será gasta com o bem y.
  - Suponha que $U_{(x,y)} = x^{3} y^{2}$
    - Logo, 60% da renda será gasta com o bem x e 40% da renda será gasta com o bem y.

Extensões: Utilizando o Lagrangeano

$$Como \quad no \quad exemplo \quad anterior \quad U\left(\mathrm{Y},\mathrm{X}\right)=Y^{0,5}X^{0,5}:$$

$$\boxed{Y^* = \frac{I}{2P_Y}.} \quad Ana\log amente: \quad \boxed{X^* = \frac{I}{2P_X}} \rightarrow$$

Demandas Marshalianas por Y e X

Note então, que poderíamos calculas as quantidades ótimas escolhidas pelo consumidor, no caso de uma função utilidade Cobb-Douglas fazendo:

$$x^* = \frac{\alpha}{(\alpha+\beta)}\frac{I}{P_x} = \frac{0,5}{(0,5+0,5)}\frac{\$80}{\$1,00} = \frac{1}{2}\frac{\$80}{\$1,00} = 40$$

$$y^* = \frac{\beta}{(\alpha+\beta)}\frac{I}{P_y} = \frac{0,5}{(0,5+0,5)}\frac{\$80}{\$2,00} = \frac{1}{2}\frac{\$80}{\$2,00} = 20$$

Extensões: Função de Utilidade Indireta

- Agora, podemos obter a função de utilidade indireta (cálculo da utilidade) para o nosso examplo, substituindo x* e y* na função utilidade.

$$V\left(P_x, P_y, I\right) = \left(\frac{I}{2P_y}\right)^{0,5}\left(\frac{I}{2P_x}\right)^{0,5} \Rightarrow V\left(P_x, P_y, I\right) = \frac{I}{\left(4P_yP_x\right)^{0,5}}$$

$$Como \quad P_x = 1, \quad P_y = 2 \quad e \quad I = 80:$$

$$V\left(P_x, P_y, I\right) = \frac{80}{\left(4 \bullet 2 \bullet 1\right)^{0,5}} \Rightarrow V\left(P_x, P_y, I\right) = 28,2843$$

- Onde V denota a utilidade maximizada.

Exemplo

- **1) Analista - Bacen - 2006 - Prova tipo 001 - 48**
- As preferências de um consumidor que adquire apenas dois bens são representadas pela função utilidade

$$U(x, y) = x^{\left(\frac{2}{3}\right)} y^{\left(\frac{1}{3}\right)}$$

- Caso a renda do consumidor seja 300, o preço do bem X seja 5 e o do bem Y igual a 10, no equilíbrio do consumidor,

Exemplo

a) a quantidade consumida do bem X corresponderá a 40 unidades.

b) a quantidade consumida do bem Y corresponderá a 20 unidades.

c) o dispêndio efetuado pelo consumidor com o bem X será 100.

d) o dispêndio efetuado pelo consumidor com o bem Y será 200.

e) o dispêndio efetuado pelo consumidor com cada um dos dois bens será igual.

Exemplo

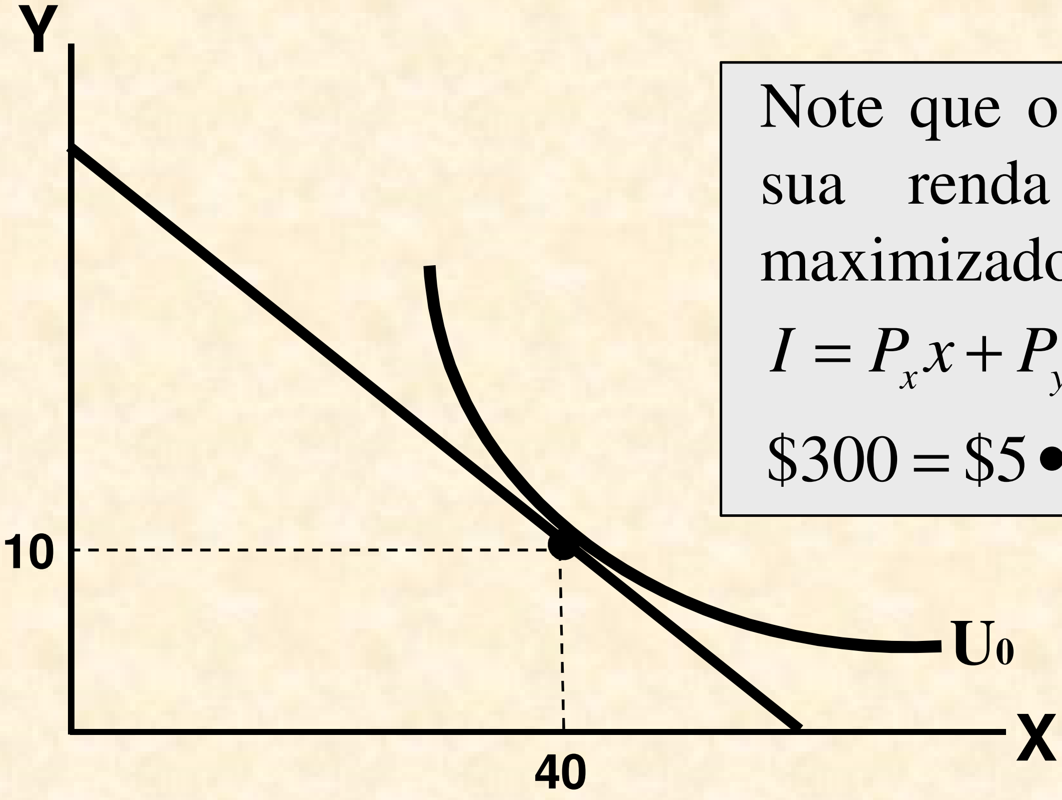
- Note que 2/3 da renda é gasta com x. Como a renda é igual a 300 (gastará 200 com x) e o preço de x é igual a 5, o consumidor comprará 40 unidades de x.
- Note que 1/3 da renda é gasta com y. Como a renda é igual a 300 (gastará 100 com y) e o preço de y é igual a 10, o consumidor comprará 10 unidades de x.
- Utilizando as funções de demanda:

$$x^* = \frac{\alpha}{(\alpha+\beta)}\frac{I}{P_x} = \frac{0,667}{(0,67+0,33)}\frac{\$300}{\$5,00} = 40$$

$$y^* = \frac{\beta}{(\alpha+\beta)}\frac{I}{P_y} = \frac{0,333}{(0,67+0,33)}\frac{\$300}{\$10,00} = 10$$

Exemplo

Logo, que o consumidor maximiza sua utilidade comprando 40 unidades de x e 10 unidades de y.



Note que o consumidor gasta toda a sua renda ao comprar a cesta maximizadora de utilidade.

$$I = P_x x + P_y\, y$$

$$\$300 = \$5 \bullet 40 + \$10 \bullet 10$$