Microeconomia
Função de Produção ESC
(Elasticidade de Substituição Constante)

Prof. Antonio Carlos Assumpção

Elasticidade de Substituição

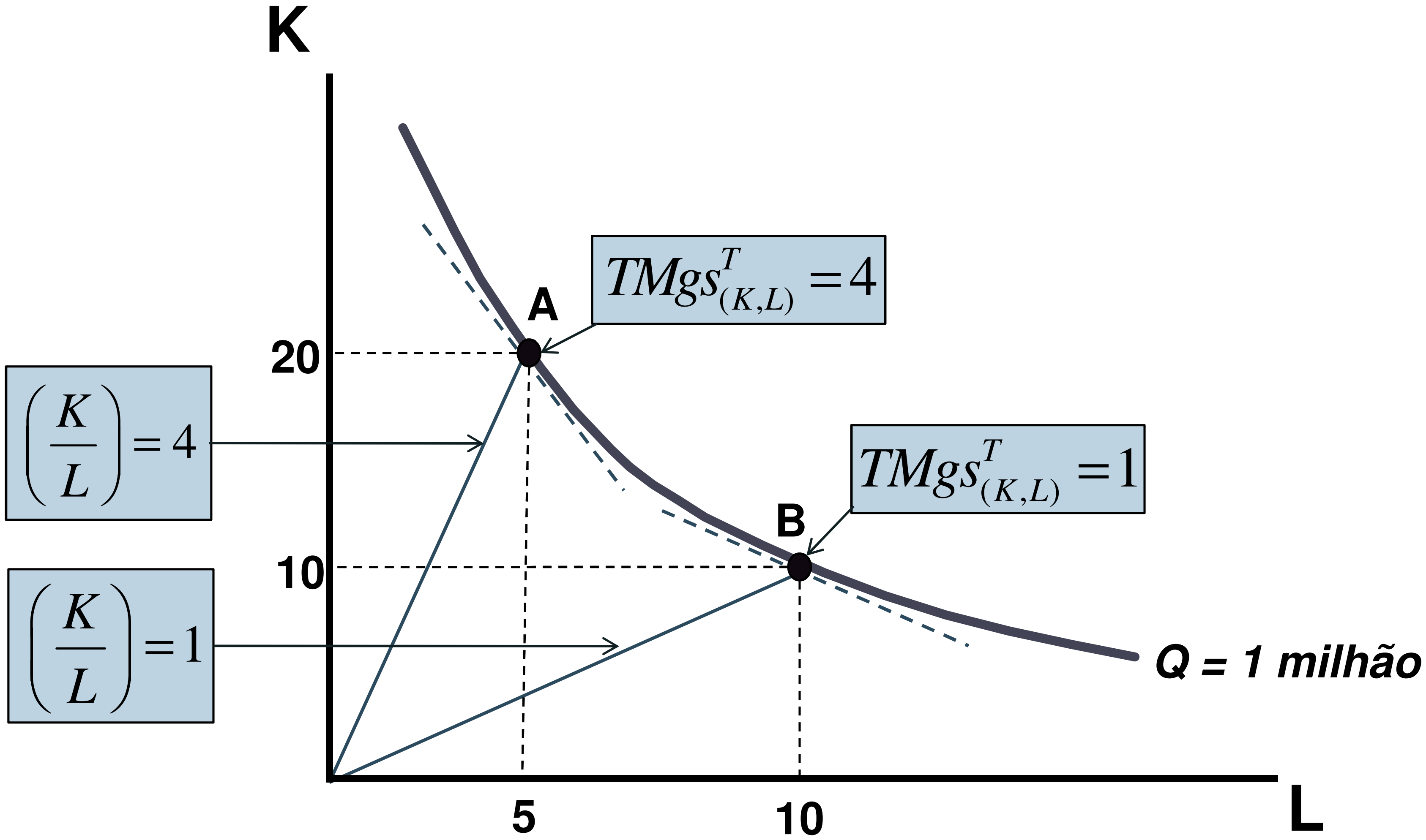
- A elasticidade de substituição é uma medida que pode nos ajudar a descrever a oportunidade de substituição entre os fatores de produção.
- Ela nos mostra a variação percentual na relação capital/trabalho induzida por uma mudança de 1 ponto percentual na taxa marginal de substituição técnica, ao longo de uma isoquanta.
- Note que, conforme nos movemos ao longo da isoquanta, substituindo capital por trabalho a relação K/L vai diminuindo, assim como a taxa marginal de substituição técnica (lembre-se que a TMgs é decrescente)

- Elasticidade de Substituição = σ

$$\sigma = \frac{\text{Variação Percentual na relação capital-trabalho}}{\text{Variação Percentual na TMgS}_{(k,L)}}$$

$$\sigma = \frac{\%\Delta\left(\frac{K}{L}\right)}{\%\Delta TMg_S^T} = \frac{d\ln\left(\frac{K}{L}\right)}{d\ln TMg_S^T}$$

OBS. A derivada do logaritmo natural de uma variável nos fornece, aproximadamente, a variação percentual dessa variável. Logo, muitas vezes, é mais conveniente aplicarmos log, seja por esse motivo, seja pelo fato de que a aplicação de log nos permite linearizar a função.


K
L
A
B
20
10
5
10
$TMgs^{T}_{(K,L)} = 4$
$TMgs^{T}_{(K,L)} = 1$
$\left(\frac{K}{L}\right) = 4$
$\left(\frac{K}{L}\right) = 1$
Q = 1 milhão

A Função de Produção ESC:

Elasticidade de Substituição Constante

- De um modo geral a FDP ESC pode ser apresentada como:

$$\boxed{Q = A\left[aK^{\rho} + bL^{\rho}\right]^{\frac{\varepsilon}{\rho}}},$$

$$com \quad A, a \quad e \quad b > 0, \quad \rho < 1 \quad e \quad \varepsilon > 0$$

- Em equilíbrio: $\boxed{TMgS^{T}_{(K,L)} = \dfrac{PMgL}{PMgK} = \dfrac{w}{r}}$

- Relembrando:
- Eq. da isoquanta: $\frac{\partial Q}{\partial K}dK+\frac{\partial Q}{\partial L}dL=0 \Rightarrow \frac{dK}{dL}=-\frac{\frac{\partial Q}{\partial L}}{\frac{\partial Q}{\partial K}}=-\frac{PMgL}{PMgK}$

$$Logo,\quad se\quad Q=A\left[aK^{\rho}+bL^{\rho}\right]^{\frac{\varepsilon}{\rho}}$$

$$TMgS_{(K,L)}^{T}=\frac{PMgL}{PMgK}=\frac{\left(\frac{\varepsilon}{\rho}\right)A\left[aK^{\rho}+bL^{\rho}\right]^{\frac{\varepsilon}{\rho}-1}\bullet\rho bL^{\rho-1}}{\left(\frac{\varepsilon}{\rho}\right)A\left[aK^{\rho}+bL^{\rho}\right]^{\frac{\varepsilon}{\rho}-1}\bullet\rho aK^{\rho-1}}=\frac{a}{b}\left(\frac{K}{L}\right)^{1-\rho}$$

- Aplicando log, temos:

$$\ln TMgS^{T}_{(K,L)} = \ln\left(\frac{a}{b}\right) + (1-\rho)\ln\left(\frac{K}{L}\right)$$

$$(1-\rho)\ln\left(\frac{K}{L}\right) = \ln TMgS^{T}_{(K,L)} - \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\ln\left(\frac{K}{L}\right) = \left(\frac{1}{1-\rho}\right)\ln TMgS^{T}_{(K,L)} - \left(\frac{1}{1-\rho}\right)\ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

- Aplicando a definição de elasticidade de substituição:

$$\sigma = \frac{d \ln\left(\frac{K}{L}\right)}{d \ln TMg_S^T} = \frac{1}{1-\rho}$$

Logo:

$$\begin{cases} \rho \to 0 \Rightarrow \sigma \to 1 \\ \rho \to 1 \Rightarrow \sigma \to \infty \\ \rho \to -\infty \Rightarrow \sigma \to 0 \end{cases}$$

- Escrevendo de outro modo:

$$Q = A\left[aK^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + bL^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

$$Lembre-se \quad que \quad \sigma = \frac{1}{1-\rho}$$

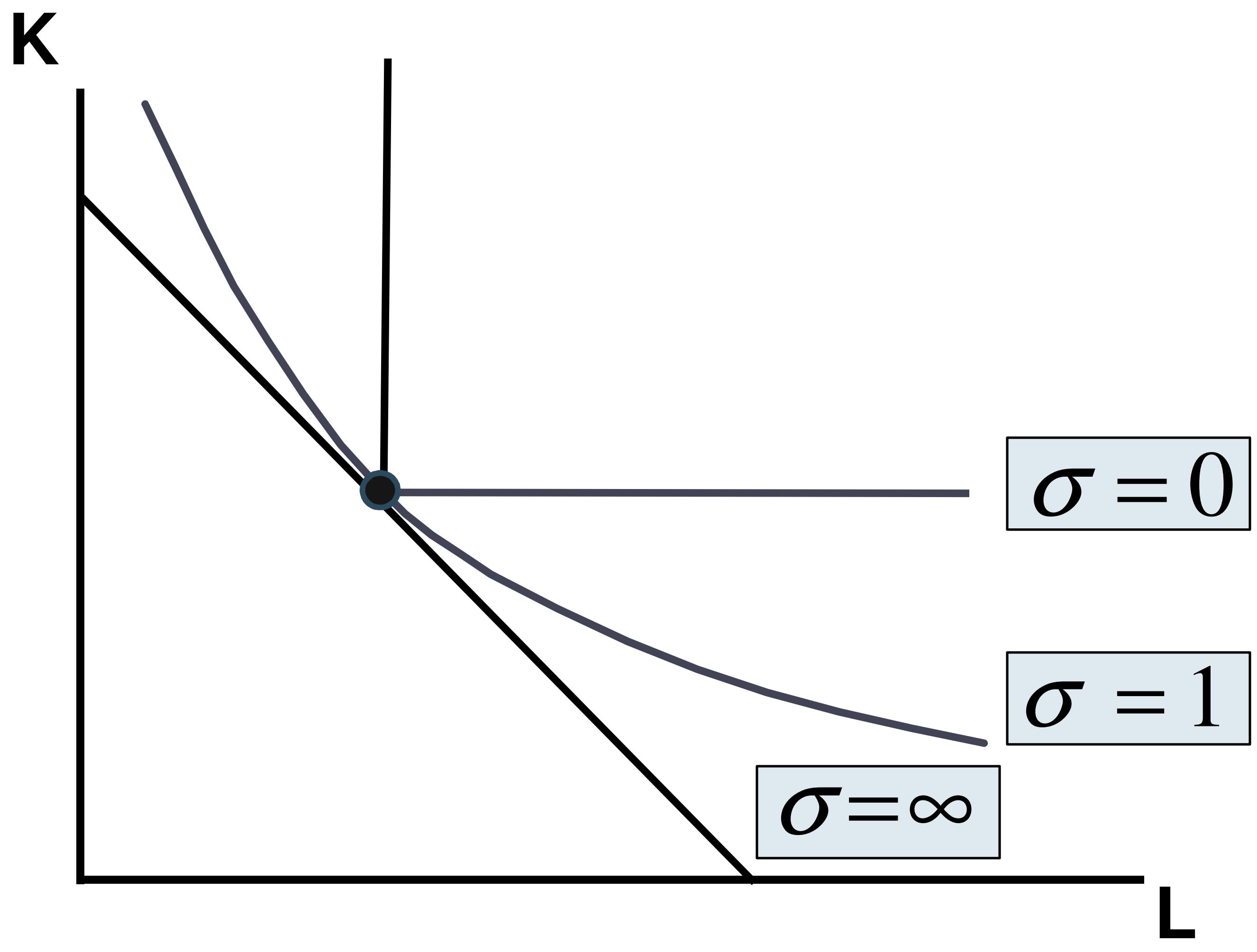
$$Se \quad \sigma \to \infty \Rightarrow substitutos \quad perfeitos$$

$$Se \quad \sigma \to 0 \Rightarrow complementares \quad perfeitos$$

$$Se \quad \sigma = 1 \Rightarrow Cobb-Douglas$$

- Observe que, dependendo da elasticidade de substituição, a função de produção ESC pode representar os três casos mais comuns com os quais trabalhamos em microeconomia.

Isoquantas



- Cobb-Douglas: $Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$

$$TMgS^{T}_{(K,L)} = \frac{PMgL}{PMgK} = \frac{\beta AK^{\alpha}L^{\beta-1}}{\alpha AK^{\alpha-1}L^{\beta}} \Rightarrow TMgS^{T}_{(K,L)} = \frac{\beta}{\alpha}\frac{K}{L}$$

$$\left(\frac{K}{L}\right) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \bullet TMgS^{T}_{(K,L)}. \quad Aplicando \quad \log$$

$$\ln\left(\frac{K}{L}\right) = \ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + \ln TMgS^{T}_{(K,L)}$$

$$\sigma = \frac{d\ln\left(\frac{K}{L}\right)}{d\ln TMgS^{T}_{(K,L)}} = 1$$

Logo, uma Cobb-Douglas possui elasticidade de substituição constante igual a 1

- $\boxed{\text{Elasticidade Escala} = \varepsilon}$

Multiplicando ambos os fatores de produção por uma constante positiva λ :

$$Q = A\left[aK^{\rho} + bL^{\rho}\right]^{\frac{\varepsilon}{\rho}} \Rightarrow \left[(\lambda aK)^{\rho} + (\lambda bL)^{\rho}\right]^{\frac{\varepsilon}{\rho}}$$

$$\Rightarrow \left[\lambda^{\rho}\left(aK^{\rho} + bL^{\rho}\right)\right]^{\frac{\varepsilon}{\rho}} \Rightarrow \lambda^{\rho\left(\frac{\varepsilon}{\rho}\right)} Q \Rightarrow \boxed{\lambda^{\varepsilon} Q}$$

$$\textbf{Logo}\begin{cases} \varepsilon = 1 \Rightarrow RCE \\ \varepsilon > 1 \Rightarrow RCrE \\ \varepsilon < 1 \Rightarrow RDE \end{cases}$$

Assim, a existência de rendimentos constantes, crescentes ou decrescentes de escala depende de ε.

- **Exemplo. Suponha que:**

$$\boxed{Q=\left[K^{0,5}+L^{0,5}\right]^{2}} \Rightarrow Q=\left[K^{0,5}+L^{0,5}\right]^{\frac{1}{0,5}} \Rightarrow \varepsilon=1 \quad e \quad \rho=0,5.$$

Assim, a FDP apresenta retornos constantes de escala .

Como σ = 1/1-ρ , temos: σ = 1/1-0,5 ⇒ σ = 2 .

Concurso ANPEC – 2013 – Questão 6

(Dado o que vimos, as respostas são automáticas)

- Considere a teoria da produção e indique quais das afirmativas abaixo são verdadeiras e quais são falsas:

a) Se a função de produção for $f(K, L) = \left[K^a + L^a\right]^{v/a}$, com $a \leq 1$, $a \neq 0$ e $v > 1$, ela apresenta retornos crescentes de escala. **V**

b) O coeficiente de elasticidade de substituição σ de uma função de produção como $f(K, L) = \left[K^a + L^a\right]^{v/a}$, com $a < 1$, $a \neq 0$ e $v > 1$, é $\sigma = 1/(1-a)$. **V**

c) Funções de produção com elasticidade de substituição $\sigma = 0$ possuem isoquantas em formato de L. **V**

d) Se a tecnologia for monotônica, isso significa que não é possível produzir ao menos a mesma quantidade aumentando a quantidade de um dos insumos. **(F) Consumidor**: Mais de um dos bens, maior utilidade. **Produção**: Mais de um dos insumos, maior produção

e) Funções de produção do tipo Cobb-Douglas possuem elasticidade de substituição $\sigma = 1$. **V**