CORECON-RJ

CONSELHO REGIONAL DE ECONOMIA

Microeconomia - ANPEC

Teoria da Firma

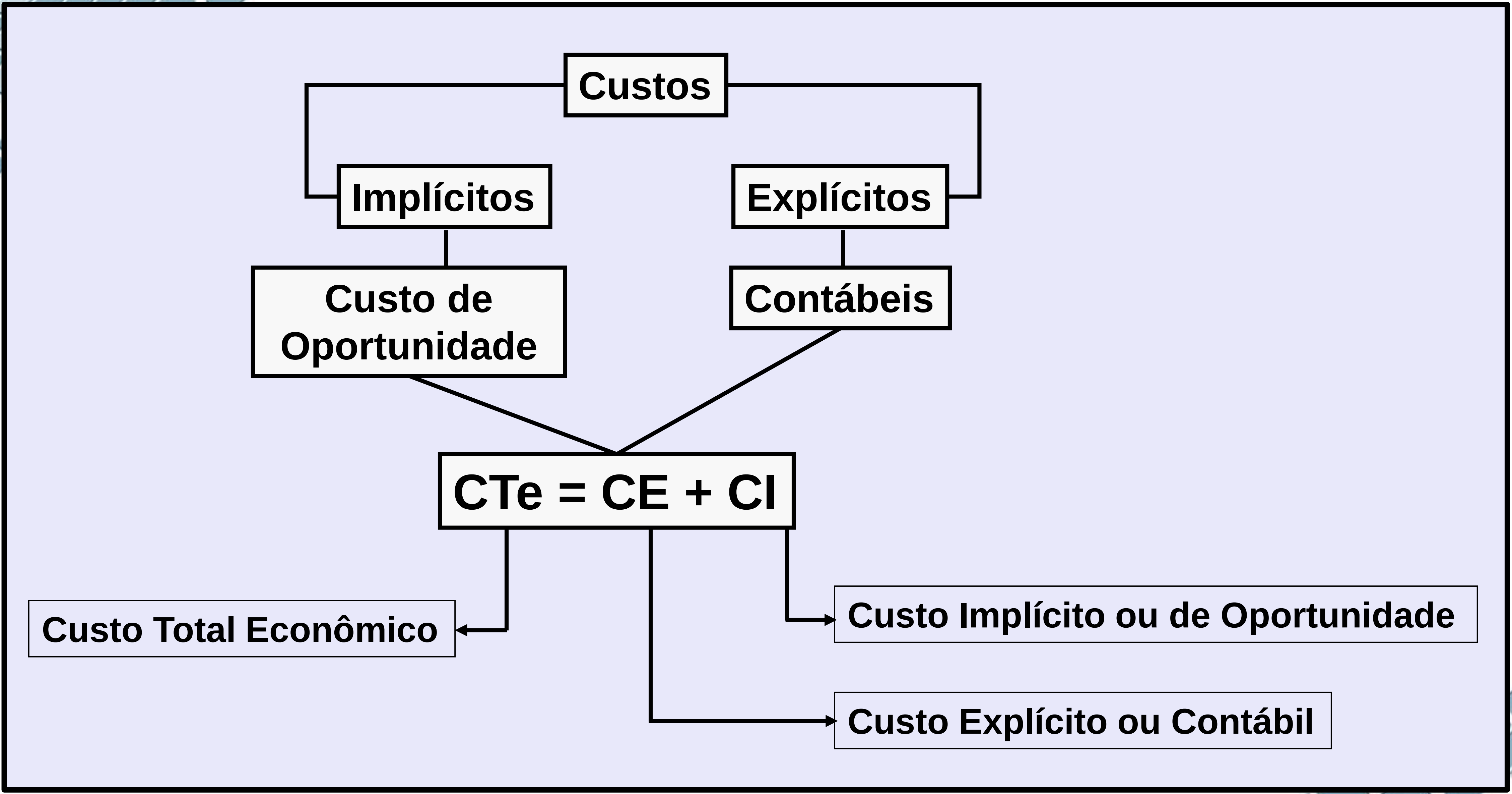
Custos de Produção

Prof.: Antonio Carlos Assumpção

Introdução

- Dada a tecnologia, os administradores devem escolher como produzir.
- Veremos como determinar o nível ótimo de produto e a combinação de insumos, minimizadora de custos.

Medição de Custos: Quais Custos Considerar ?



Medição de Custos: Quais Custos Considerar ?

- **Custo de Oportunidade**
  - Custos associados às oportunidades deixadas de lado, caso a firma não empregue seus recursos da maneira mais rentável.

- Exemplo
  - Uma firma é proprietária do edifício onde opera e, portanto, não paga aluguel.
  - Isso significa que o custo do espaço ocupado pelos escritórios da firma é zero ?

Medição de Custos: Quais Custos Considerar ?

- **Custos Irreversíveis *(Sunk Costs)***
  - São despesas que já ocorreram e não podem ser recuperadas.
  - Esses custos não deveriam afetar as decisões da firma.

Medição de Custos: Quais Custos Considerar ?

- **Exemplo**
  - Uma firma paga $500.000 por uma opção de compra de um edifício.
  - O custo do edifício é $5 milhões; logo, o custo total é $5,5 milhões.
  - A firma encontra um segundo edifício pelo preço de $5,25 milhões.
  - **Qual edifício a firma deveria comprar ?**

Custos Explícitos

- **Custos Totais**

CT = CF + CV

- onde:
  - CF = custo fixo: custo que independe da quantidade produzida.
  - CV = custo variável: custo que depende da quantidade produzida.
  - CT = custo total.

Custos Explícitos

- Também podemos tratar os custos usando os fatores de produção e suas respectivas remunerações. Usando a mão de obra como único fator variável, temos:

CT = rK + wL

- onde:
  - **w** = remuneração da mão de obra (salário)
  - **r** = remuneração do capital (taxa de juros)

Desta forma, wL é o custo variável e rK o custo fixo.

Abordagem de Curto Prazo

Custos Médios (Unitários)

$$CTMe = \frac{CT}{Q}$$ → **Custo Total Médio**

$$CVMe = \frac{CV}{Q}$$ → **Custo Variável Médio**

$$CFMe = \frac{CF}{Q}$$ → **Custo Fixo Médio**

Desta forma: CTMe = CFMe + CVMe

Custos X Produtividades

- **Relação Fundamental:**

Custos = Inverso das Produtividades

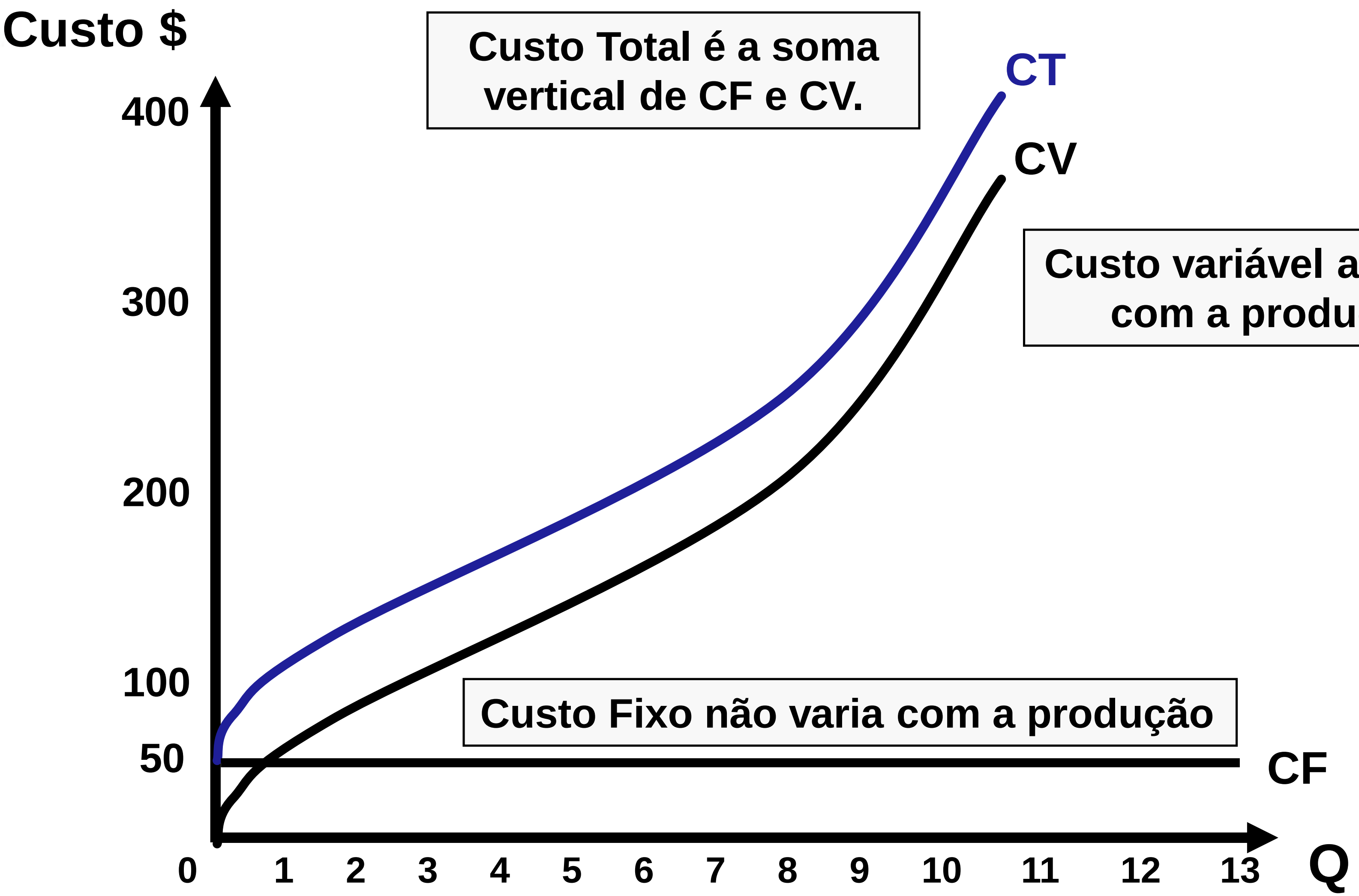
- Como $\mathbf{CV = wL} \Rightarrow \boxed{\mathbf{CVMe} = \dfrac{wL}{Q}}$

- Logo: $\boxed{CVMe = w\dfrac{1}{PMeL}}$

Curva de Custos da Empresa

Q	CF	CV	CT	CMg	CFM	CVM	CTM
0	50	0	50	---	---	---	---
1	50	50	100	50	50.0	50.0	100.0
2	50	78	128	28	25.0	39.0	64.0
3	50	98	148	20	16.7	32.7	49.3
4	50	112	162	14	12.5	28.0	40.5
5	50	130	180	18	10.0	26.0	36.0
6	50	150	200	20	8.3	25.0	33.3
7	50	175	225	25	7.1	25.0	32.1
8	50	204	254	29	6.3	25.5	31.8
9	50	242	292	38	5.6	26.9	32.4
10	50	300	350	58	5.0	30.0	35.0
11	50	385	435	85	4.5	35.0	39.5

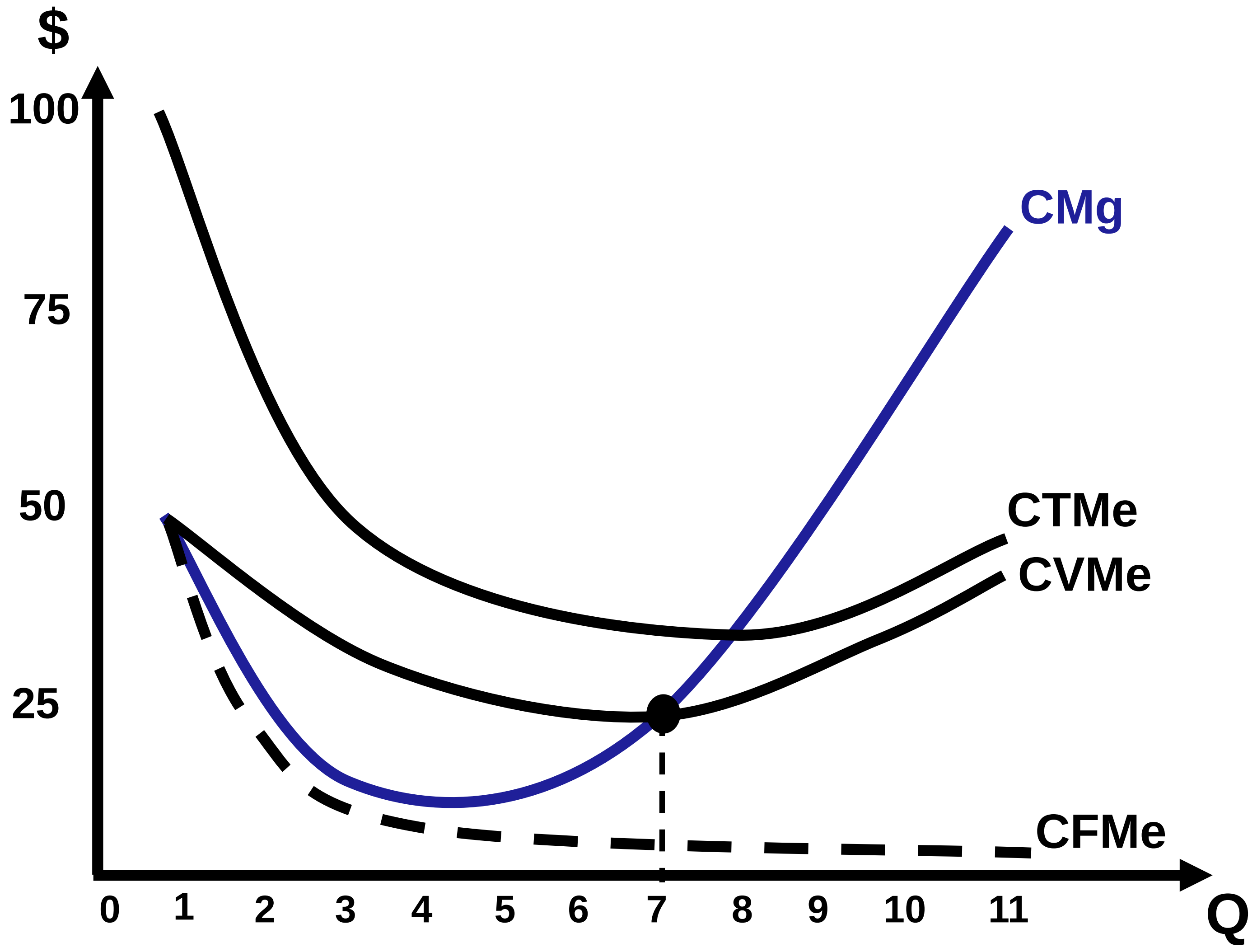
Curva de Custos da Empresa



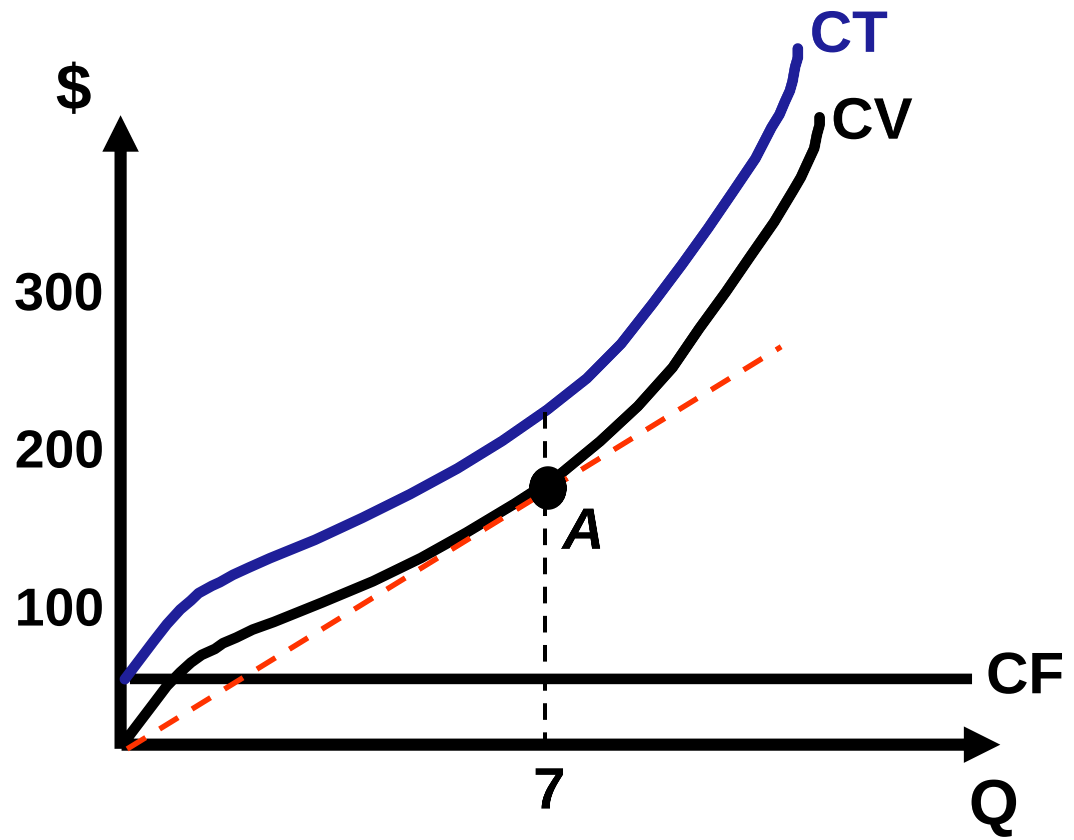
Curva de Custos da Empresa

- O custo fixo é uma reta horizontal, pois é o mesmo para qualquer quantidade produzida.
- O formato da curva de custo variável pode ser explicado pela lei dos rendimentos marginais decrescentes.
  - Enquanto a produtividade estiver crescendo o custo variável crescerá à taxas decrescentes. Quando a produtividade passa a decrescer o custo variável passa a crescer à taxas crescentes;
- A curva de custo total é paralela à curva de custo variável, pois tal custo é o somatório dos custos fixo e variável.

Curva de Custos da Empresa



Curva de Custos da Empresa



- Com relação à reta que parte da origem e tangencia a curva de custo variável:
  - Inclinação = CVMe.
  - A inclinação da curva de CV num ponto = CMg.
  - Logo, CMg = CVMe para 7 unidades de produção (ponto *A*)

Custos Unitários: Um resumo

- O formato em U das curvas de CVMe, CTMe e Cmg é explicado pela lei dos rendimentos marginais decrescentes.
- A curva de CFMe é uma hipérbole, pois à medida que a quantidade produzida aumenta, o custo fixo vai sendo diluído, diminuindo seu valor por unidade, ou seja, diminuindo o CFMe. Note então, que a diferença entre o CTMe e o CVMe vai diminuindo com o aumento da quantidade produzida.

Custos Unitários: Um resumo

- A curva de custo marginal corta as curvas de custo variável médio e custo total médio em seus respectivos pontos de mínimo, pois o custo marginal é a variação no custo, dada uma variação na quantidade de forma que, somente quando este for maior do que a média, a média estará crescendo.

Custos no Longo Prazo: Minimização de Custos.

- **O Problema Dual**
- O problema da firma agora passa a ser:
  - como selecionar os insumos, de forma a obter um determinado nível de produção com o menor custo possível ?
  - como selecionar os insumos, de forma a obter a maior produção possível, dado um certo custo ?

Custos no Longo Prazo: Minimização de Custos.

- **Dualidade:**

- A firma pode **maximizar a produção** para um dado custo total.

$$Maximizar \quad f\left(K,L\right)=Q \;,\; s.a. \; CT_0 = wL + rK$$

- A firma pode **minimizar o custo total** para um dado volume de produção.

$$Minimizar \quad CT = wL + rK \;,\; s.a. \quad f\left(K,L\right)=Q_0$$

Custos no Longo Prazo: Minimização de Custos.

- **Maximização da Produção**
  - As firmas escolhem os insumos, ambos com produtividades marginais positivas e decrescentes, de forma a maximizar a produção para um certo custo total.
  - Sendo os mercados competitivos, as firmas tomam como dados os preços do trabalho (w) e do capital (r). Desta forma, a firma deve maximizar uma função de produção (escolher quantidades de K e L, dados seus preços), sujeita a uma restrição de custos, CT_0.

Custos no Longo Prazo: Minimização de Custos.

- **Minimização de Custo**
  - As firmas escolhem os insumos, ambos com produtividades marginais positivas e decrescentes, de forma a minimizar o custo total para uma certa quantidade produzida.
  - Sendo os mercados competitivos, as firmas tomam como dados os preços do trabalho (w) e do capital (r). Desta forma, a firma deve minimizar uma função de custo total (escolher quantidades de K e L, dados seus preços), sujeito à restrição de produzir uma certa quantidade, por exemplo, Q_0.

A Linha de Isocusto

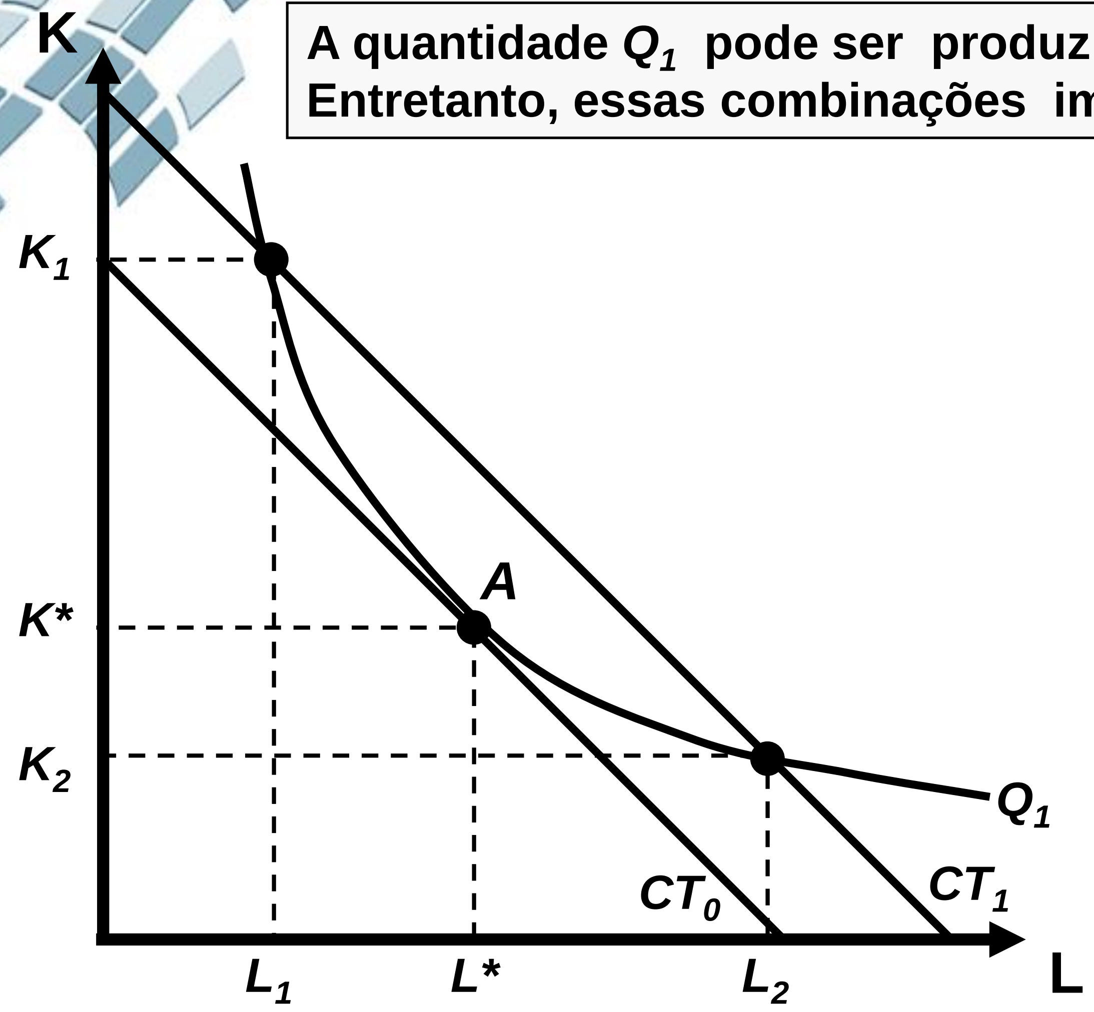
- A linha de isocusto nos mostra todas as combinações possíveis de trabalho e capital que podem ser adquiridas ao mesmo custo total. Logo:

$$\boxed{CT = rK + wL} \Rightarrow \boxed{K = \frac{CT}{r} - \frac{w}{r}L}$$

Produção com Custo Mínimo

Q_1 *é* uma isoquanta para o nível de produção Q_1. A curva de isocusto CT_1 mostra todas as combinações de *K* e *L* que custam CT_1.

A quantidade Q_1 pode ser produzida com as combinações K_1L_1 ou K_2L_2. Entretanto, essas combinações implicam custo maior relativamente à combinação *K*L**.



A Escolha Minimizadora de Custos

- Note que o equilíbrio que ocorre no ponto A, com K* e L*, que implica em:

$$TMgs^{T}_{(K,L)} = \frac{w}{r} \Rightarrow \boxed{\frac{PMgL}{PMgk} = \frac{w}{r}}$$

Inclinação da Linha de Isocusto

Inclinação da Isoquanta

A Escolha Minimizadora de Custos (Formalizando o Argumento)

- Devemos minimizar o CT sujeito a uma restrição de produção: $Q = Q_0$.

- *O Lagrangeano:* $\boxed{\Phi = wL + rK - \lambda\left[f\left(K,L\right) - Q_0\right]}$

- *Condições de Primeira Ordem:*

$$(I)\ \ \frac{\partial \Phi}{\partial K} = 0 \Rightarrow r - \lambda PMg_K\left(K,L\right) = 0$$

$$(II)\ \ \frac{\partial \Phi}{\partial L} = 0 \Rightarrow w - \lambda PMg_L\left(K,L\right) = 0$$

$$(III)\ \ \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow f\left(K,L\right) - Q_0 = 0$$

A Escolha Minimizadora de Custos (Formalizando o Argumento)

$$\text{De } (I) \ temos: r - \lambda PMg_K(K,L) = 0 \rightarrow \lambda = \frac{r}{PMg_K(K,L)}$$

$$\text{De } (II) \ temos: w - \lambda PMg_L(K,L) = 0 \rightarrow \lambda = \frac{w}{PMg_L(K,L)}$$

$$Fazendo \ \lambda = \lambda : \frac{r}{PMg_K(K,L)} = \frac{w}{PMg_L(K,L)} \rightarrow \boxed{\frac{w}{r} = \frac{PMg_L(K,L)}{PMg_K(K,L)}}$$

Condição de Equilíbrio

- No caso de um processo produtivo representado por uma FDP Cobb-Douglas, $Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$:

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = PMg_K = \alpha AK^{\alpha-1}L^{\beta} \quad e \quad \frac{\partial Q}{\partial L} = PMg_L = \beta AK^{\alpha}L^{\beta-1}$$

$$\frac{PMg_L}{PMg_K} = \frac{\beta AK^{\alpha}L^{\beta-1}}{\alpha AK^{\alpha-1}L^{\beta}} = \frac{\beta K}{\alpha L}$$

$$\boxed{Equilíbrio \Rightarrow \frac{w}{r} = \frac{\beta K}{\alpha L}}$$

▪ Minimização de Custos X Maximização da Produção

$$Como\ vimos: Equilíbrio \Rightarrow \frac{w}{r} = \frac{\beta K}{\alpha L} \rightarrow \boxed{K = \frac{\alpha}{\beta}\frac{w}{r}L}$$

Caminho de Expansão

$\boxed{K = \frac{\alpha}{\beta}\frac{w}{r}L}$

Maximização da Produção → **Substituir na R.O.**

Minimização de Custos → **Substituir na FDP**

Exemplo:

- Uma firma possui a seguinte função de produção: Q = KL.
- O custo total da firma é dado pela função 10K + 20L + 200.
- Em um ambiente em que a firma minimiza os seus custos para produzir 200 unidades, calcule o custo total mínimo.

$$Equilíbrio \Rightarrow \frac{w}{r} = \frac{\beta K}{\alpha L} \rightarrow \frac{w}{r} = \frac{K}{L} \rightarrow K = \frac{w}{r} L \rightarrow \boxed{K = 2L}$$

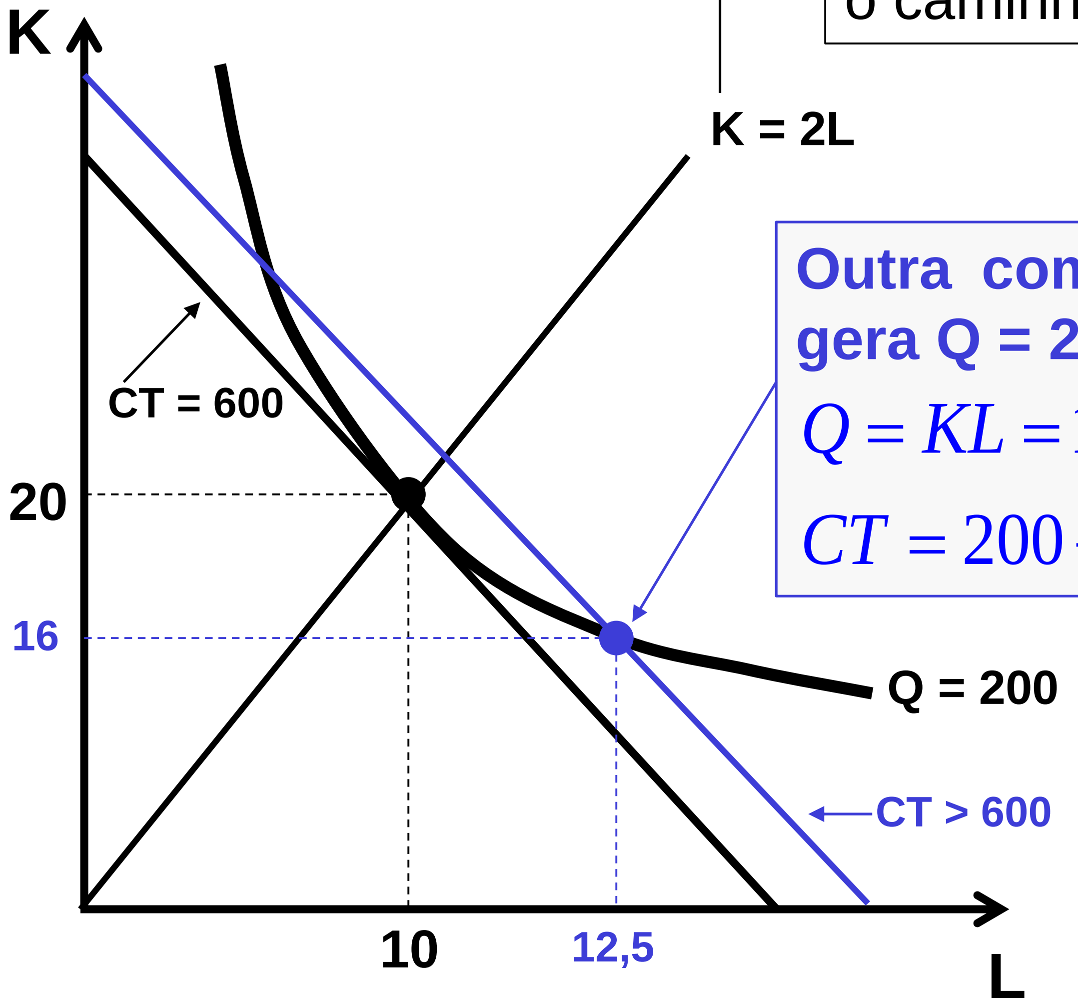
$$Q = KL \rightarrow Q = 2L^2 \rightarrow 200 = 2L^2 \rightarrow \boxed{L = 10 \;\; e \;\; K = 20}$$

$$Com\ isso: \;\; CT = 200 + 10(20) + 20(10) = \$600$$

- Logo, ao escolher L = 10 e K = 20 a firma conseguirá produzir 200 unidades ao menor custo possível, $CT_{min(200)}$ = \$600.

Exemplo:

Como a FDP Cobb-Douglas é homotética, o caminho de expansão é uma linha reta.



Outra combinação de K e L que gera Q = 200 , mas com CT > 600.

$$Q = KL = 16 \bullet 12{,}5 = 200$$

$$CT = 200 + 10(16) + 20(12{,}5) = 610$$

Exemplo:

- **O Problema Dual:**
- Qual a produção máxima que pode ser obtida com a firma gastando \$600 (CT = \$600)?
  - Lembrando que existe um custo fixo igual a \$200.

$$Equilíbrio \Rightarrow \frac{w}{r} = \frac{\beta K}{\alpha L} \rightarrow \frac{w}{r} = \frac{K}{L} \rightarrow K = \frac{w}{r} L \rightarrow \boxed{K = 2L}$$

Substituindo na restrição de custos:

$$CT = rK + wL \rightarrow K = \frac{CT}{r} - \frac{w}{r} L \rightarrow K = \frac{400}{10} - \frac{20}{10} L$$

$$K = 40 - 2L \rightarrow 2L = 40 - 2L \rightarrow \boxed{L = 10 \;\; e \;\; K = 20}$$

$$Q = KL \rightarrow Q = 20 \bullet 10 = 200$$

$$Com\ isso:\ \ CT = 200 + 10(20) + 20(10) = \$600$$

Minimização de Custos: FDP CES.

- Suponha uma FDP CES: $\boxed{Q = A\left[\alpha K^{\rho} + \beta L^{\rho}\right]^{\frac{\varepsilon}{\rho}}.}$

- Como vimos, a condição de equilíbrio é dada por $\dfrac{PMgL}{PMgK} = \dfrac{w}{r}.$

$$TMgS^{T}_{(K,L)} = \frac{PMgL}{PMgK} = \frac{\left(\dfrac{\varepsilon}{\rho}\right) A\left[\alpha K^{\rho} + \beta L^{\rho}\right]^{\frac{\varepsilon}{\rho}-1} \bullet \rho\beta L^{\rho-1}}{\left(\dfrac{\varepsilon}{\rho}\right) A\left[\alpha K^{\rho} + \beta L^{\rho}\right]^{\frac{\varepsilon}{\rho}-1} \bullet \rho\alpha K^{\rho-1}} = \boxed{\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{K}{L}\right)^{1-\rho}}$$

Minimização de Custos: FDP CES.

$$\boxed{Equilíbrio \rightarrow \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{K}{L}\right)^{1-\rho} = \frac{w}{r}.}\quad Como\ \sigma = \frac{1}{1-\rho} \rightarrow 1-\rho = \frac{1}{\sigma}.\ Assim:$$

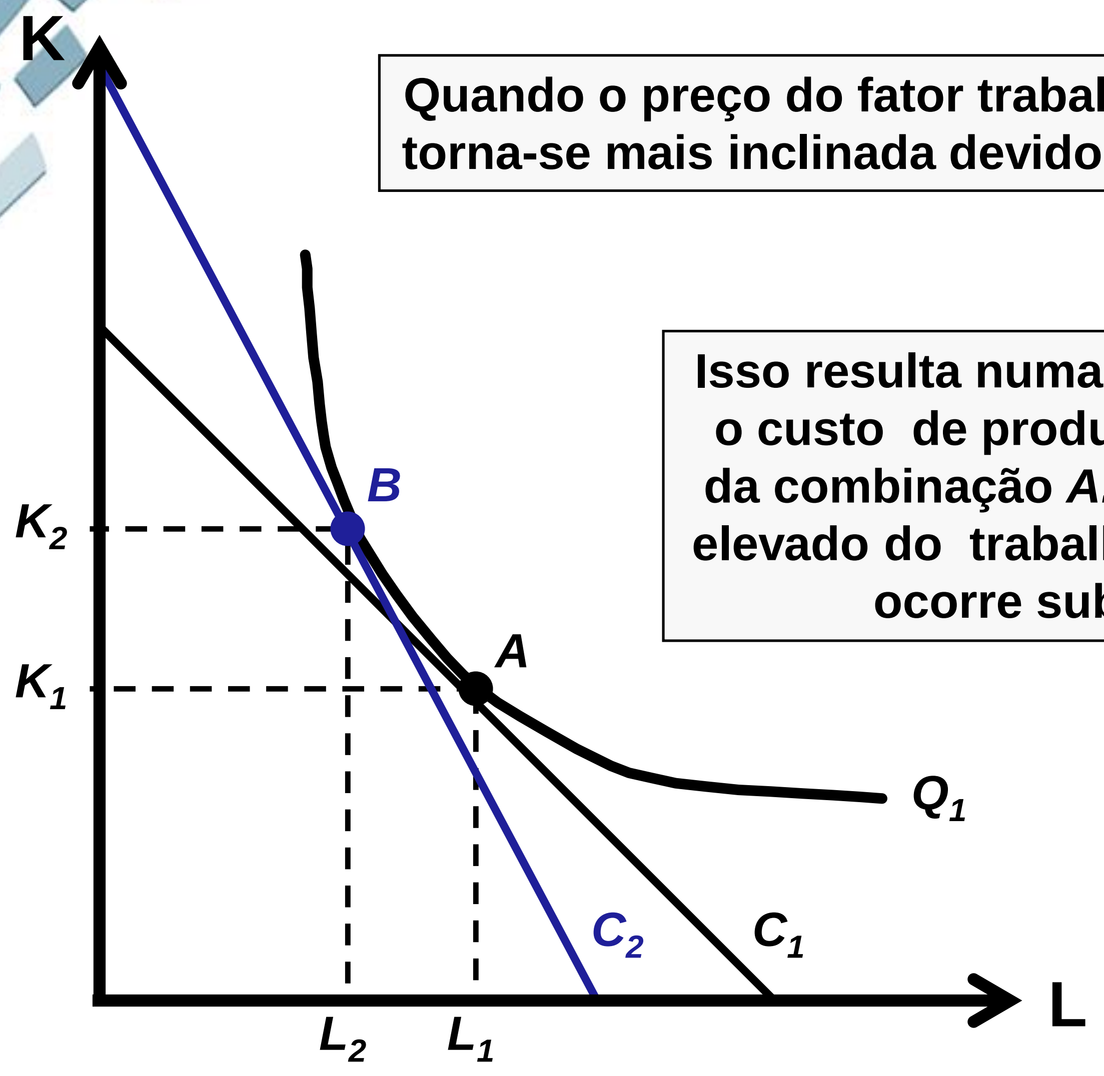
$$\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{\sigma}} = \frac{w}{r} \rightarrow \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{K}{L}\right) = \left(\frac{w}{r}\right)^{\sigma}.\ Se\ \alpha = \beta \rightarrow \left(\frac{K}{L}\right) = \left(\frac{w}{r}\right)^{\sigma}.$$

- Observe que a FDP CES também é homotética, pois a proporção dos fatores que minimiza os custos independe do nível de produção.
- Observe que, caso a elasticidade de substituição seja igual a 1, como vimos anteriormente, a FDP CES se transforma em uma Cobb-Douglas.

Substituição de Insumos Quando o Preço de um Insumo Varia

Quando o preço do fator trabalho aumenta a curva de isocusto torna-se mais inclinada devido à mudança na inclinação -*(w/L)*.

Isso resulta numa nova combinação de *K e L* que minimiza o custo de produzir Q. A combinação *B* é usada no lugar da combinação *A.* A nova combinação reflete o custo mais elevado do trabalho relativamente ao capital, de modo que ocorre substituição de trabalho por capital.



Custo Médio no Longo Prazo

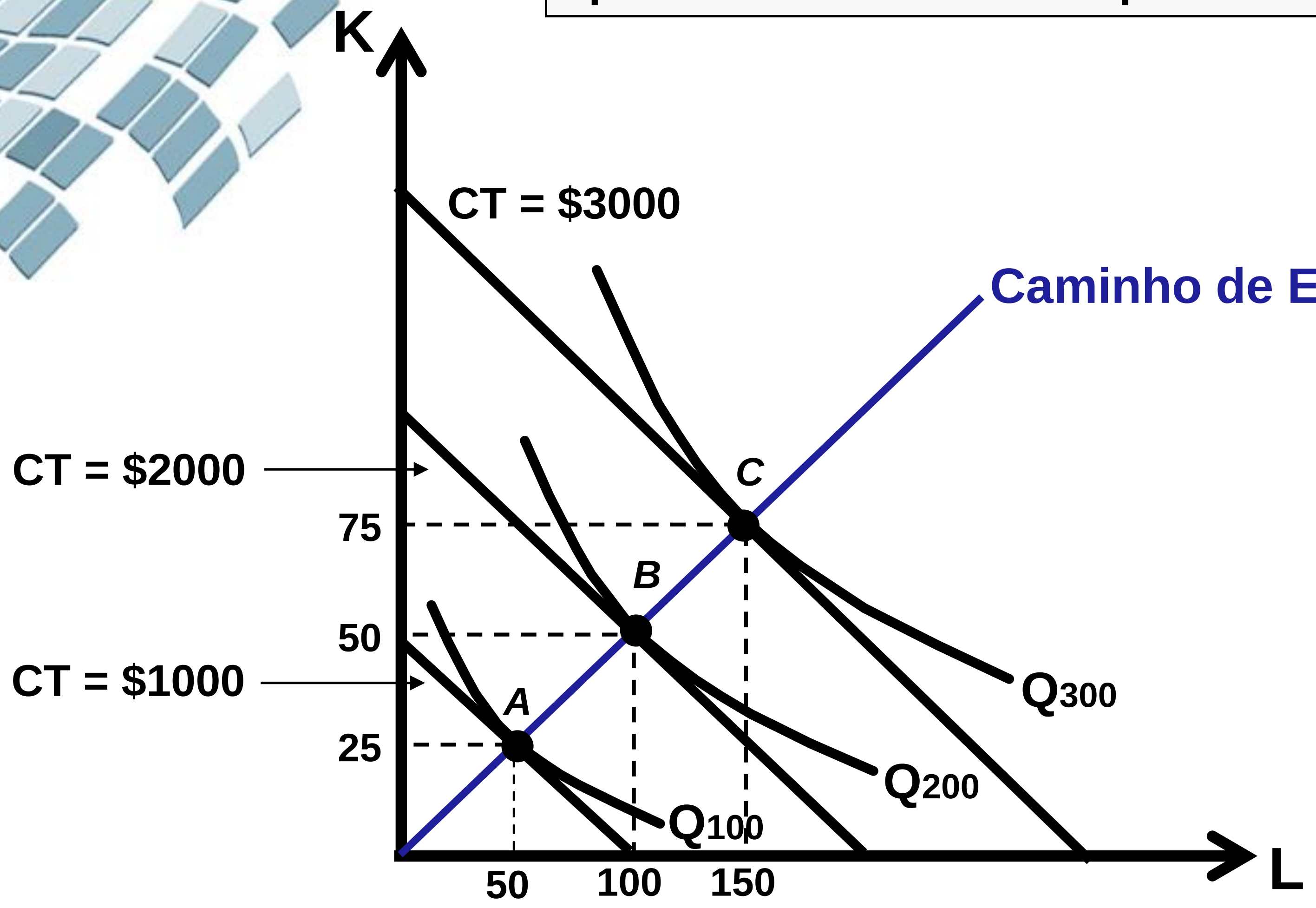
- No longo prazo, a capacidade de variar a quantidade de capital permite que a empresa reduza seus custos via aumentos (ou diminuições) na escala de produção.
- Dessa forma, o que determina o formato das curvas de custo médio e marginal de longo prazo são, justamente, os rendimentos de escala, que podem ser crescentes, decrescentes ou constantes.

Custo Médio no Longo Prazo

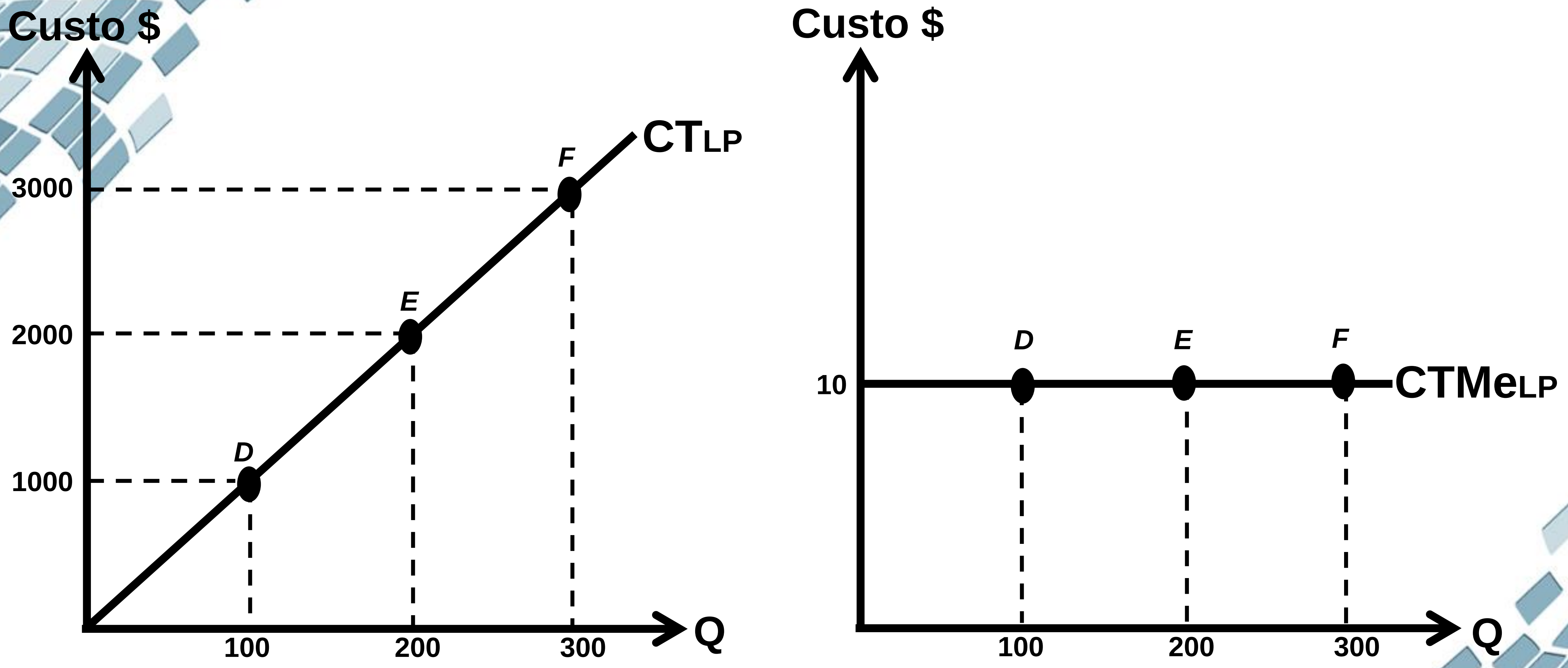
- Minimização de Custos com Níveis de Produção Variando
  - O caminho de expansão da empresa representa as combinações de trabalho e capital que apresentam menores custos para cada nível de produção.

Caminho de Expansão da Firma (FDP homotética)

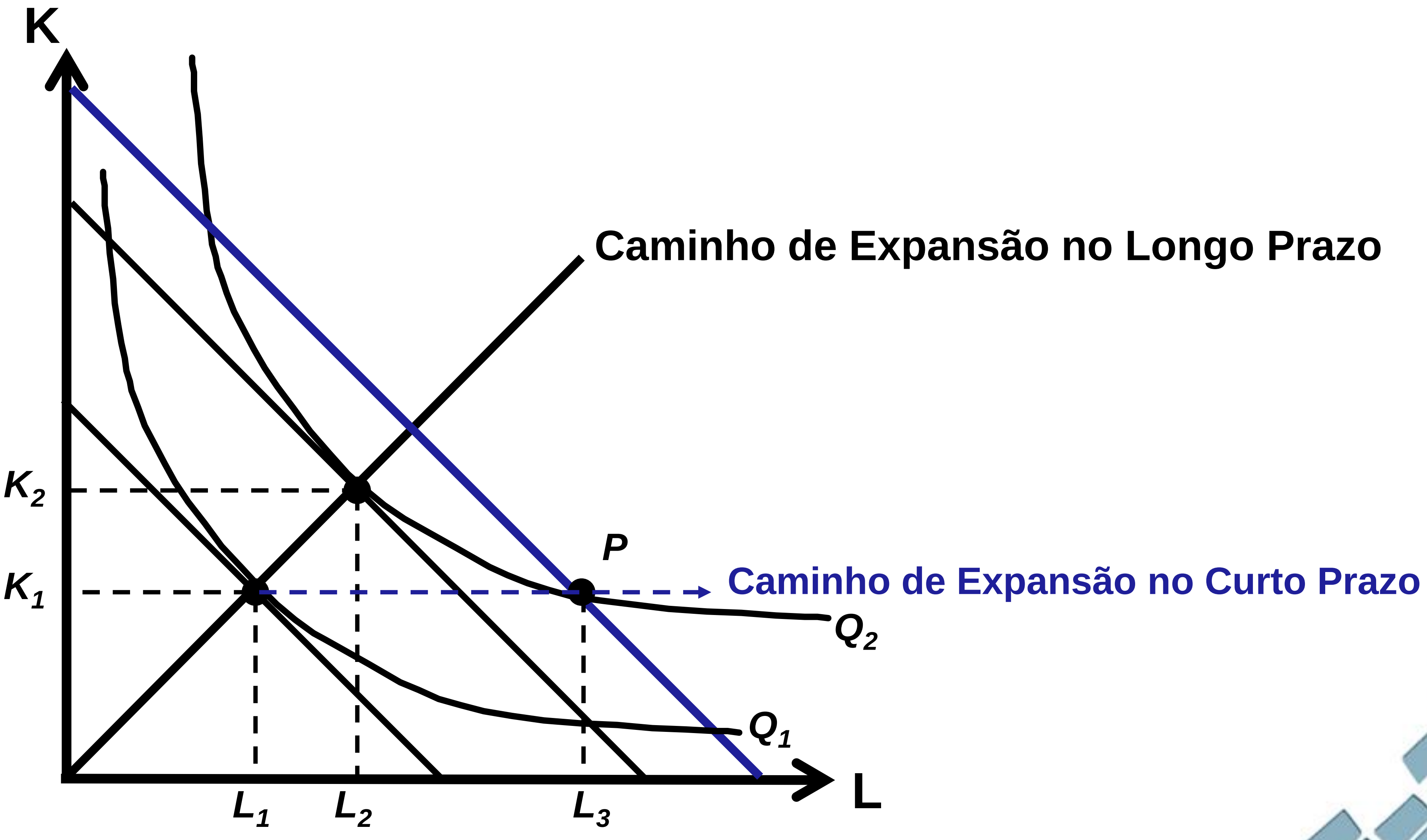
O caminho de expansão ilustra as combinações de trabalho e capital que apresentam menor custo para cada nível de produção.



As Curvas de Custos no Longo Prazo



Inflexibilidade da Produção no Curto Prazo



Custo Médio no Longo Prazo

- Elasticidade Escala
  - Mede a variação proporcional na produção dada uma expansão de todos os insumos na mesma proporção.

$$\boxed{E_E = \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta \lambda}{\lambda}}}$$

$E_E > 1$: **rendimentos crescentes de escala**

$E_E < 1$: **rendimentos decrescentes de escala**

$E_E = 1$: **rendimentos constantes de escala**

Variação proporcional na escala de produção

Custo Médio no Longo Prazo

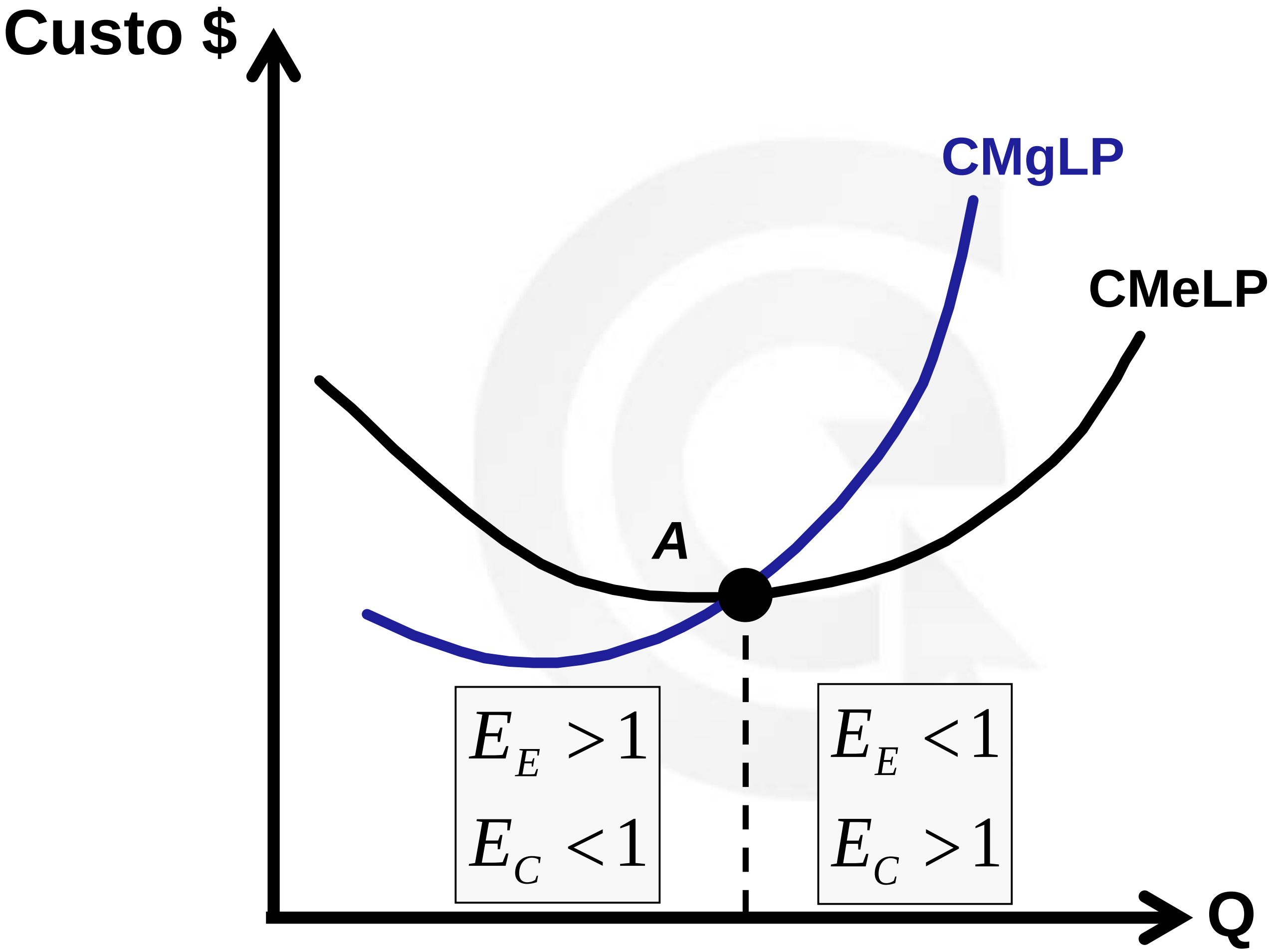
- Elasticidade Custo
  - Como vimos que a produtividade é o inverso do custo correspondente, podemos definir a elasticidade custo da seguinte maneira:

$$\boxed{E_C = \frac{\dfrac{\Delta CT}{CT}}{\dfrac{\Delta Q}{Q}} = \frac{1}{E_E}}$$

Custo Médio no Longo Prazo

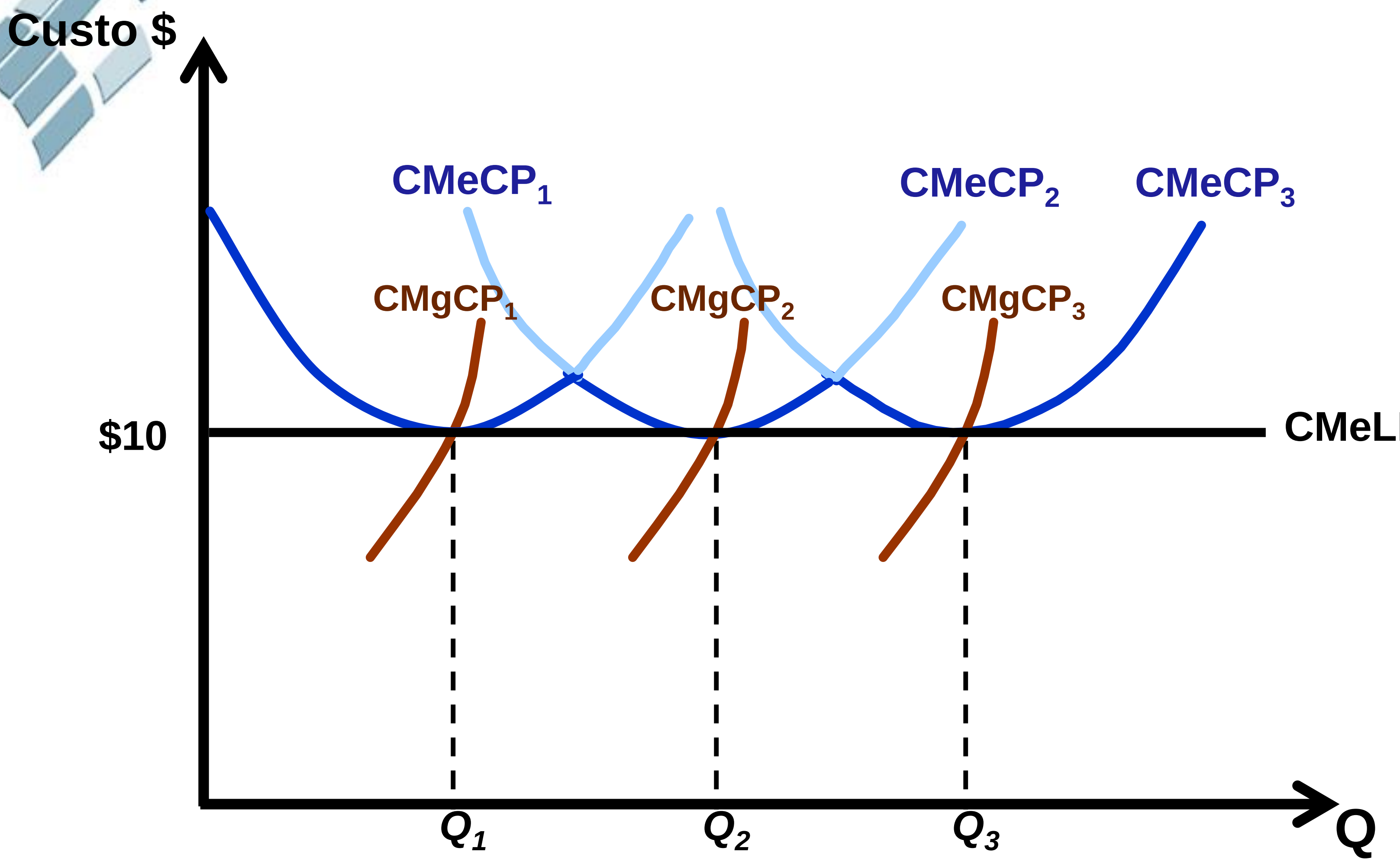
- Portanto, alterando a escala de produção, podemos ter 3 resultados diferentes:
  - Manutenção do custo médio (rendimentos constantes de escala).
  - Aumento do custo médio (rendimentos decrescentes de escala).
  - Redução do custo médio (rendimentos crescentes de escala).

Custo Médio e Custo Marginal no Longo Prazo



Custos a Longo Prazo com Rendimentos Constantes de Escala

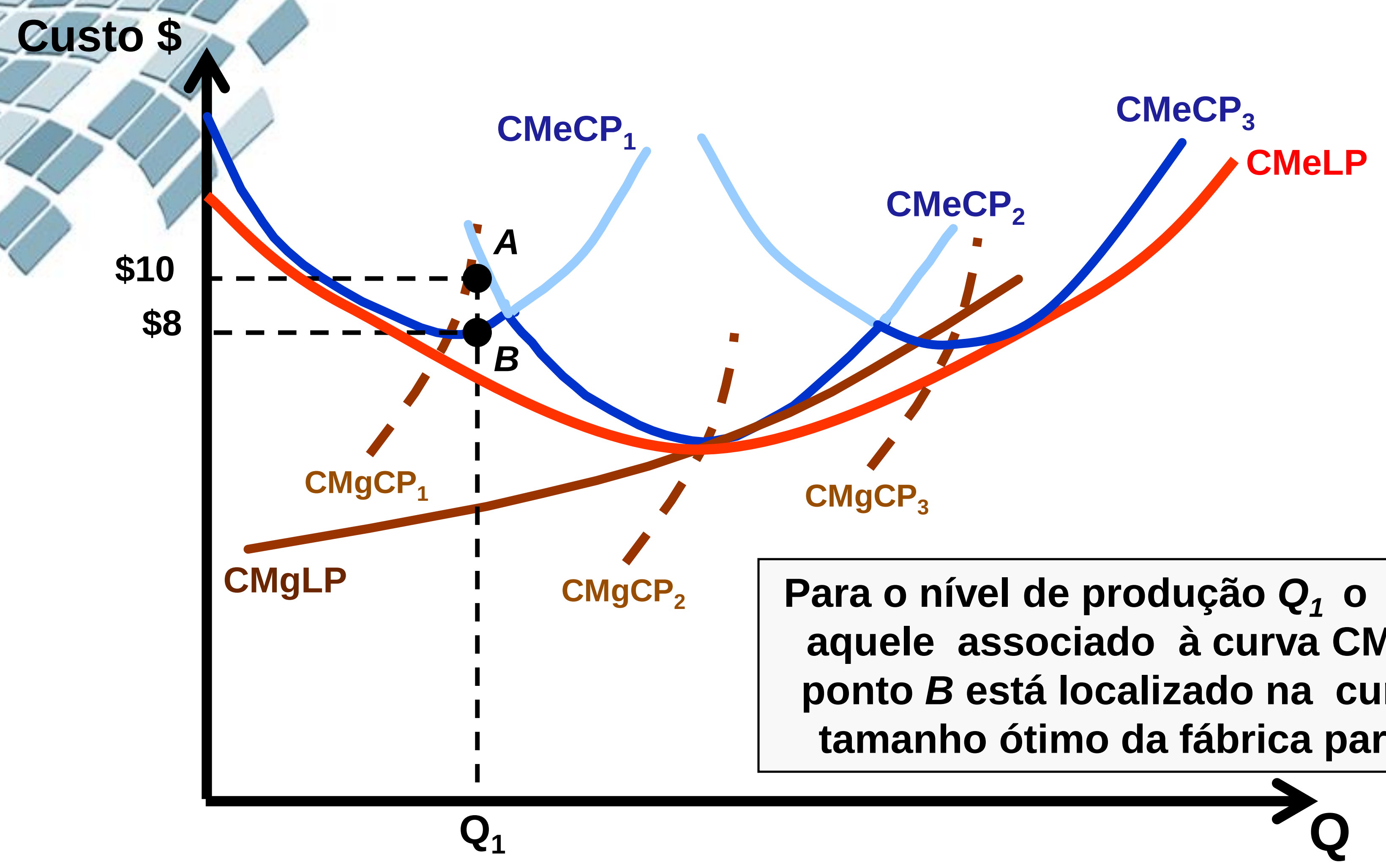
Se, para vários tamanhos da fábrica, o CMeCP mínimo é $10, temos: CMeLP = CMgLP = constante



Custos a Longo Prazo com Rendimentos Constantes de Escala

- **Observação**
  - O tamanho ótimo da fábrica depende da produção esperada (p.ex. para produzir Q_1 escolhemos $CMeCP_1$, etc.).
  - A curva de custo médio de longo prazo é a *envoltória* das curvas de custo médio de curto prazo.
- **Pergunta**
  - Como o custo médio mudaria se fosse escolhido um nível de produção diferente?

Custos a Longo Prazo com Economias e Deseconomias de Escala



Para o nível de produção Q_1 o tamanho escolhido da fábrica seria aquele associado à curva CMeCP$_1$, e teríamos CMeCP = \$8. O ponto *B* está localizado na curva de CMeLP porque refere-se ao tamanho ótimo da fábrica para determinado nível de produção.

Custos no Longo Prazo

- **Qual é a curva de longo prazo da empresa?**
  - As empresas podem mudar a escala de produção para obter diferentes níveis de produção no longo prazo.
  - A curva de custo médio de longo prazo corresponde aos trechos das curvas de CMeCP em azul escuro, e representa o custo mínimo para qualquer nível de produção.

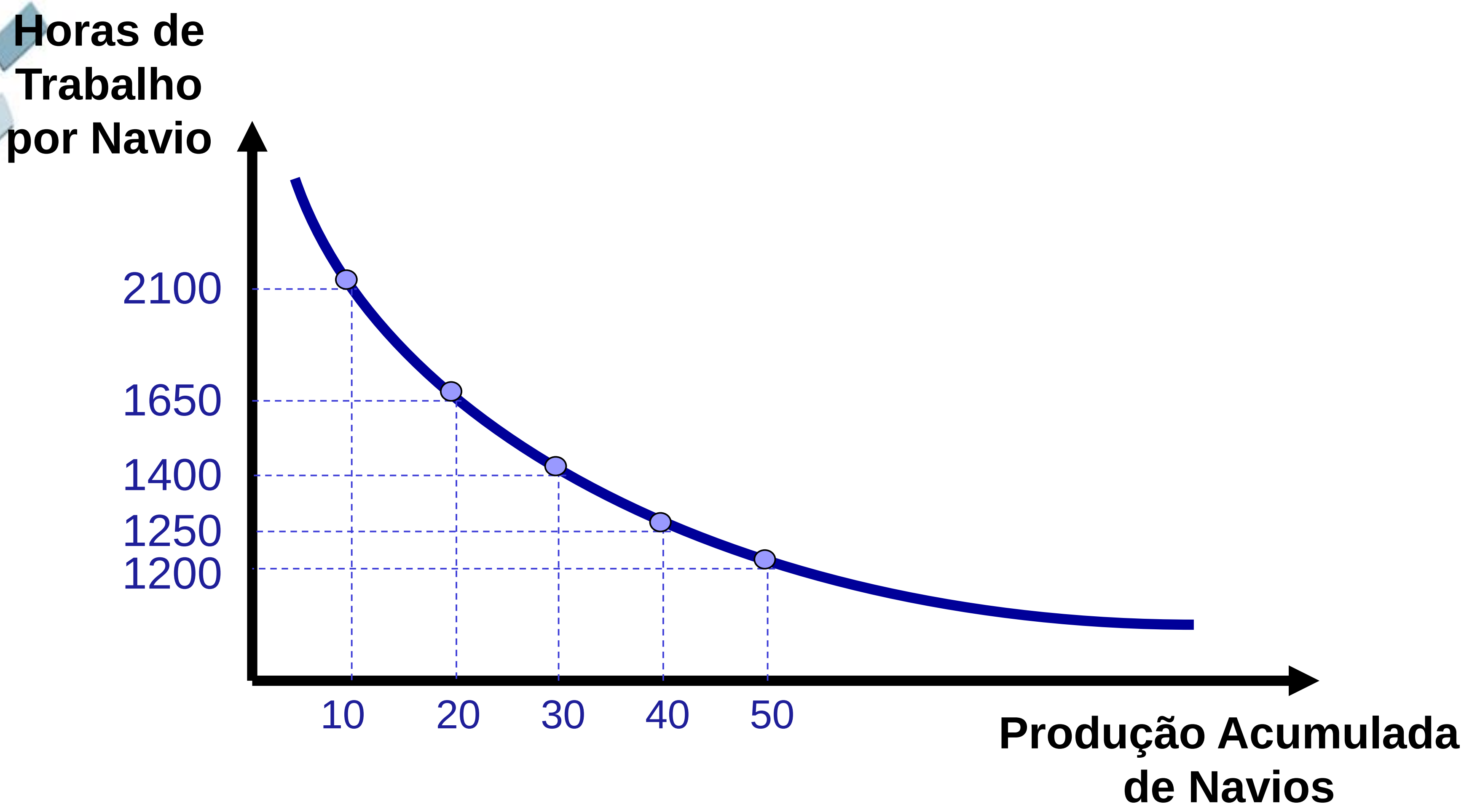
Custo Médio no Longo Prazo

- Como vimos anteriormente, com rendimentos constantes de escala, os custos totais crescem proporcionalmente à quantidade produzida. Logo, o $CTMe_{LP}$ é constante e igual ao CMg_{LP}. Sendo assim, a curva de $CTMe_{LP}$ é formada pelos pontos de mínimo das curvas de custo total médio de curto prazo, com todas as escalas de produção sendo minimizadoras de custos de longo prazo.

As Curvas de Aprendizagem

- O custo de produção de uma empresa pode diminuir ao longo do tempo pela maior experiência e eficiência de administradores e operários.

As Curvas de Aprendizagem



As Curvas de Aprendizagem

- A Curva de Aprendizagem pode ser expressa por:

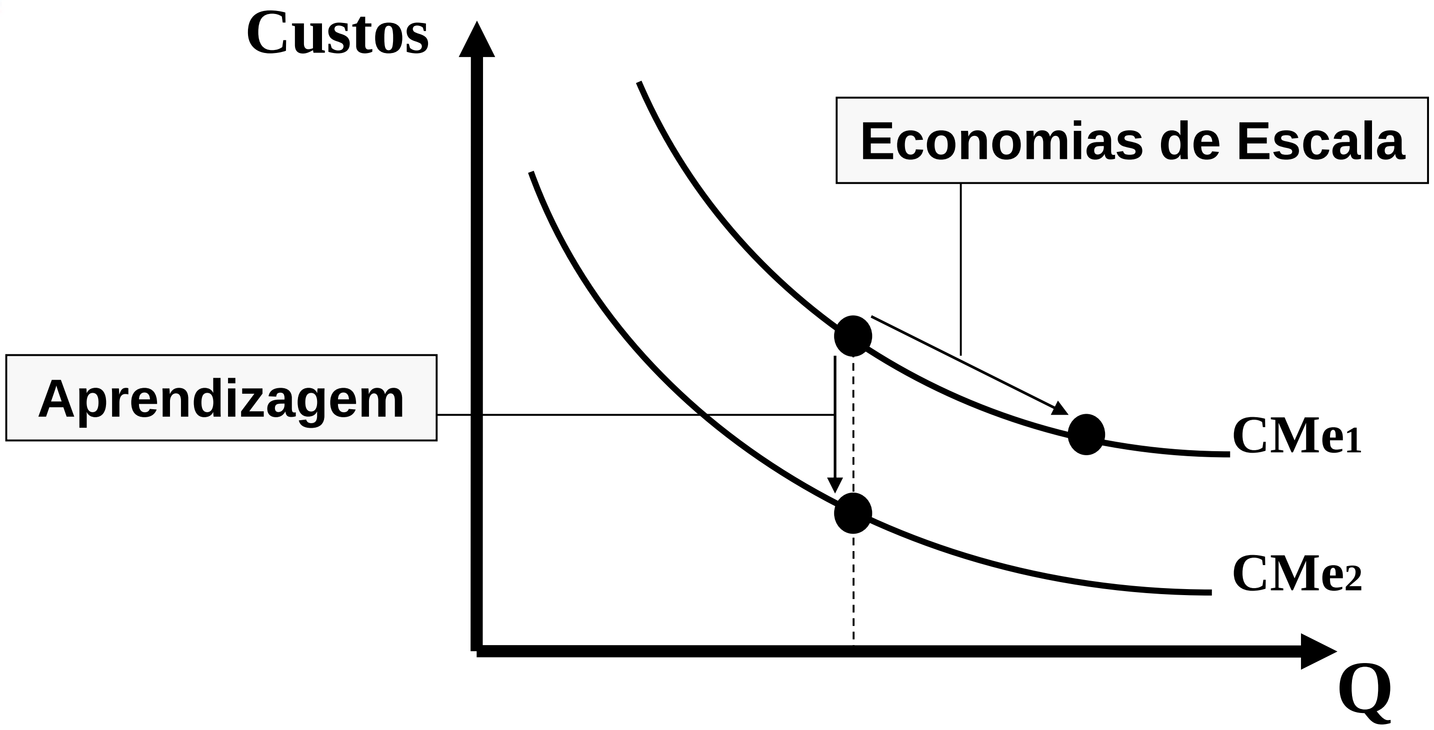
$$\boxed{\underbrace{L}_{\text{Trabalho por unidade de produto}} = \underbrace{A}_{\text{Constantes positivas}} + \underbrace{B}_{\text{Constantes positivas}}\underbrace{N}_{\text{Número de unidades acumuladas de produto}}^{-\overbrace{\beta}^{\text{Constante com valor entre 0 e 1}}}}$$

As Curvas de Aprendizagem

$$L = A + BN^{-\beta}$$

- Se N = 1 , temos L = A + B. Logo, A + B mede o insumo necessário para a produção do primeiro navio.
- Se $\beta = 0$, o trabalho por unidade de produto não será alterado pela maior produção acumulada de navios. Dito de outra forma, não há aprendizagem.
- Se $0 < \beta < 1$, o trabalho por unidade de produto diminuirá com o aumento da produção acumulada, convergindo para A, que representa o menor nível de trabalho por unidade de produto possível.

Economia de Escala X Aprendizagem



Economias de Escala X Economias de Escopo

- **Economias de Escala**
- Ao aumentarmos ambos os fatores de produção (K e L) na mesma proporção (escala de produção), podemos ter três resultados:
  - Se K e L aumentam em 100% e a produção aumenta em 100%, temos retornos constantes de escala. Com isso, o CTMeLP fica constante.
  - Se K e L aumentam em 100% e a produção aumenta menos que 100%, temos retornos decrescentes de escala. Com isso, o CTMeLP aumenta.
  - Se K e L aumentam em 100% e a produção aumenta mais que 100%, temos retornos crescentes de escala. Com isso, o CTMeLP diminui.

Economias de Escala X Economias de Escopo

- **Economias de Escopo**
- Verificam-se economias de escopo quando a produção conjunta de dois produtos por parte de uma única empresa é maior do que a produção que seria obtida por duas empresas diferentes, cada uma produzindo um único produto, considerando um mesmo custo total.
- Dito de outro modo, teremos economias de escopo desde que $[C(q_1)+C(q_2)] > C(q_1,q_2)$, ou seja, quando o custo de produção em duas unidades (fábricas) diferentes é maior que o custo de produção conjunto (em uma única unidade).

Economias de Escala X Economias de Escopo

- **Economias de Escopo**
- Se ambos os produtos utilizam capital (custo fixo) e trabalho (custo variável) a produção conjunta pode reduzir custos pelo compartilhamento do uso dos fatores de produção.

- De forma mais clara, pense na possibilidade de produzir dois bens compartilhando a mesma estrutura física, ou seja, compartilhando o mesmo custo fixo. Nesse caso, teríamos economias de escopo.

Economias de Escala X Economias de Escopo

- **O grau das economias de escopo** mede a economia de custos proporcionada pela produção conjunta:

$$ESC = \frac{\left[C(q_1) + C(q_2)\right] - C(q_1, q_2)}{C(q_1, q_2)}$$

  - Se ESC > 0 $\Rightarrow$ Economias de escopo
  - Se ESC < 0 $\Rightarrow$ Deseconomias de escopo

- Observe então, que teremos economias de escopo desde que $[C(q_1)+C(q_2)] > C(q_1,q_2)$. Dito de outro modo, teremos economias de escopo desde que a função de custos seja subaditiva.

Observação:
uma função é dita subaditiva se $f(x+y)$ for menor que $f(x)+f(y)$. Ou seja, quando o total é menor que a soma das partes.

Extensões Importantes

- As curvas de custos mostram as relações existentes entre os custos e as quantidades produzidas, partindo do pressuposto de que todos os demais fatores permanecem constantes.
- Dito de outro modo, nos mostram a relação entre os custos e a produção, dados os preços dos fatores de produção e a tecnologia.
- Caso tenhamos alterações nos preços dos fatores de produção ou na tecnologia, as curvas de custos serão deslocadas.
- Veremos agora algumas curvas de custos, derivadas de determinadas funções de produção.

a) Cobb-Douglas

$$\boxed{Q = AK^{\alpha}L^{\beta}}$$

- Como vimos anteriormente, a minimização de custos exige que:

$$\boxed{\frac{PMg_L}{PMg_K} = \frac{w}{r}}$$

- No caso de uma Cobb-Douglas, temos: $\boxed{\dfrac{\beta K}{\alpha L} = \dfrac{w}{r}.}$

$$Logo: \beta K = \frac{w}{r}\alpha L \rightarrow \boxed{K = \frac{w}{r}\frac{\alpha}{\beta}L} \rightarrow \boxed{\text{Isolinha: caminho de expansão}}$$

a) Cobb-Douglas

- Substituindo K na FDP podemos calcular a demanda condicional por L de forma a minimizar o custo de produção para produzir determinada quantidade.

$$Q = A\left(\frac{w}{r}\frac{\alpha}{\beta}L\right)^{\alpha} L^{\beta} \rightarrow Q = A\left(\frac{w}{r}\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\alpha} L^{\alpha+\beta} \rightarrow L^{\alpha+\beta} = \frac{Q}{A\left(\frac{w}{r}\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\alpha}} \rightarrow$$

$$L^{C} = \left(\frac{Q}{A\left(\frac{w}{r}\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \rightarrow \boxed{L^{C} = \left(\frac{Q}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{r}{w}\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}}$$

a) Cobb-Douglas

$$Como,\ \ em\ equilíbrio\ \ \frac{\beta K}{\alpha L} = \frac{w}{r} \rightarrow \boxed{L = \frac{\beta}{\alpha}\frac{r}{w}K}$$

- Substituindo L na FDP podemos calcular a demanda condicional por K de forma a minimizar o custo de produção para produzir determinada quantidade.

$$Q = AK^{\alpha}\left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{r}{w}K\right)^{\beta} \rightarrow Q = A\left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{r}{w}\right)^{\beta}K^{\alpha+\beta} \rightarrow K^{\alpha+\beta} = \left[\frac{Q}{A\left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{r}{w}\right)^{\beta}}\right]$$

$$K^{\alpha+\beta} = \left(\frac{\alpha w}{\beta r}\right)^{\beta}\frac{Q}{A} \rightarrow \boxed{K^{C} = \left(\frac{Q}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left(\frac{\alpha w}{\beta r}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}}$$

a) Cobb-Douglas

- As Demandas Condicionais por K e L:

$$K^C = \left(\frac{Q}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha w}{\beta r}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$$

$$L^C = \left(\frac{Q}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{r}{w}\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$$

- As Demandas Condicionais por K e L nos mostram as quantidades desses fatores de produção que minimizam o custo total para uma certa quantidade produzida (Q), dados *A, r, w,* α e β .

a) Cobb-Douglas

- Agora que temos as demandas condicionais por K e L (calculam as quantidades de K e L que minimizam o custo de produção), podemos derivar a curva de custo total.

$$Como\ CT = wL + rK \quad ,$$

$$L^C = \underbrace{\left(\frac{Q}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{r}{w}\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}} \quad e \quad K^C = \underbrace{\left(\frac{Q}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha w}{\beta r}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}}$$

$$\boxed{CT = w\left[\left(\frac{\beta r}{\alpha w}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \left(\frac{Q}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\right] + r\left[\left(\frac{\alpha w}{\beta r}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \left(\frac{Q}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\right]}$$

a) Cobb-Douglas

$$CT = w\left[\left(\frac{\beta r}{\alpha w}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\left(\frac{Q}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\right] + r\left[\left(\frac{\alpha w}{\beta r}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\left(\frac{Q}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\right]$$

$$\boxed{CT = w^{\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)} r^{\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)}\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)} + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\left(\frac{-\alpha}{\alpha+\beta}\right)}\right]\left(\frac{Q}{A}\right)^{\left(\frac{1}{\alpha+\beta}\right)}}$$

- **Logo, a função de custo destaca:**
  - como o custo total aumenta à medida que o nível de produção aumenta;
  - como o custo varia quando variam os preços dos insumos.

a) Cobb-Douglas

- Observe que, caso exista custo fixo, devemos incorporá-lo à nossa função de custo total.

$$CT = CF + w^{\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)} r^{\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)} \left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)} + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\left(\frac{-\alpha}{\alpha+\beta}\right)} \right] \left(\frac{Q}{A}\right)^{\left(\frac{1}{\alpha+\beta}\right)}$$

- **Utilizando nosso exemplo anterior:**
  - **CT = 200 + 10K + 20L e Q = KL :**

$$CT = 200 + 4,472136 \bullet 3,162278 [1+1] \left(\frac{200}{1}\right)^{0,5} = \$600$$

a) Cobb-Douglas

$$Custo\ associado\ \grave{a}s\ seguintes\ quantidades\ de\ L\ e\ K:$$

$$L^C = \left(\frac{Q}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{r}{w}\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \rightarrow L = \left(\frac{200}{1}\right)^{0,5} \left(\frac{10}{20}\bullet 1\right)^{0,5} = 10$$

$$K^C = \left(\frac{Q}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha w}{\beta r}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \rightarrow K = \left(\frac{200}{1}\right)^{0,5} \left(\frac{20}{10}\bullet 1\right)^{0,5} = 20$$

a) Cobb-Douglas

- Caso $\alpha + \beta = 1$, teremos:

$$CT = w^{\beta} r^{\alpha} \left[\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\beta} + \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{-\alpha} \right] \left(\frac{1}{A} \right) Q$$

- Nesse caso, o custo aumenta proporcionalmente à produção (rendimentos constantes de escala).

a) Cobb-Douglas

- Ainda supondo retornos constantes de escala, imagine que a firma deseje produzir Q unidades e que o salário tenha dobrado.
- Como se dará a mudança nos custos ?

$$CT_1 = \left(2w\right)^{\beta} r^{\alpha} \left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\beta} + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\alpha} \right] \left(\frac{1}{A}\right) Q$$

$$CT_1 = 2^{\beta} \underbrace{w^{\beta} r^{\alpha} \left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\beta} + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\alpha} \right] \left(\frac{1}{A}\right) Q}_{CT_0} = \boxed{2^{\beta} CT_0}$$

a) Cobb-Douglas

- **Interpretando:**
  - Como assumimos que $\alpha < 1$ e $\beta < 1$, temos que $CT_1 < 2CT_0$.
  - Embora o salário tenha dobrado, o custo de produção de Q não dobrou, pois um aumento em w faz com que, como vimos, a firma substitua trabalho por capital, mantendo assim o aumento do custo total sob controle.

b) Proporções Fixas

$$\boxed{Q = \min\{\alpha K, \beta L\}}$$

- Sabemos que, em equilíbrio $Q = \alpha K = \beta L$.
  - Logo, se a firma deseja obter Q unidades de produto, ela deve utilizar **Q/α unidades do fator de produção K e Q/β unidades do fator de produção L, que são as demandas condicionais por K e L**, quaisquer que sejam os preços dos fatores K e L. Logo, a função de custos é dada por:

$$CT = rK + wL \rightarrow CT = \frac{rQ}{\alpha} + \frac{wQ}{\beta} \rightarrow \boxed{CT = Q\left(\frac{r}{\alpha} + \frac{w}{\beta}\right)}$$

- Logo, o CT que depende de Q, w e r, considerando que a função apresenta rendimentos constantes de escala, possui o seguinte formato:

$$\boxed{CT(Q, r, w) = Q \bullet CT(1, r, w)} \longrightarrow \boxed{\text{Produção multiplicada pelo custo unitário.}}$$

b) Proporções Fixas

- **Exemplo**
- Suponha $Q = min\{K, 2L\}$.
- Caso a firma decida minimizar o custo total para produzir 32 unidades, com r = 10 e w = 5, quais as quantidades de K e L que devem ser utilizadas ? Qual o menor custo total ?

b) Proporções Fixas

- Como $Q = min\{K, 2L\}$, em equilíbrio, devemos ter 2L= K. Substituindo na FDP, temos:

$$Q = \min\{2L, 2L\}$$

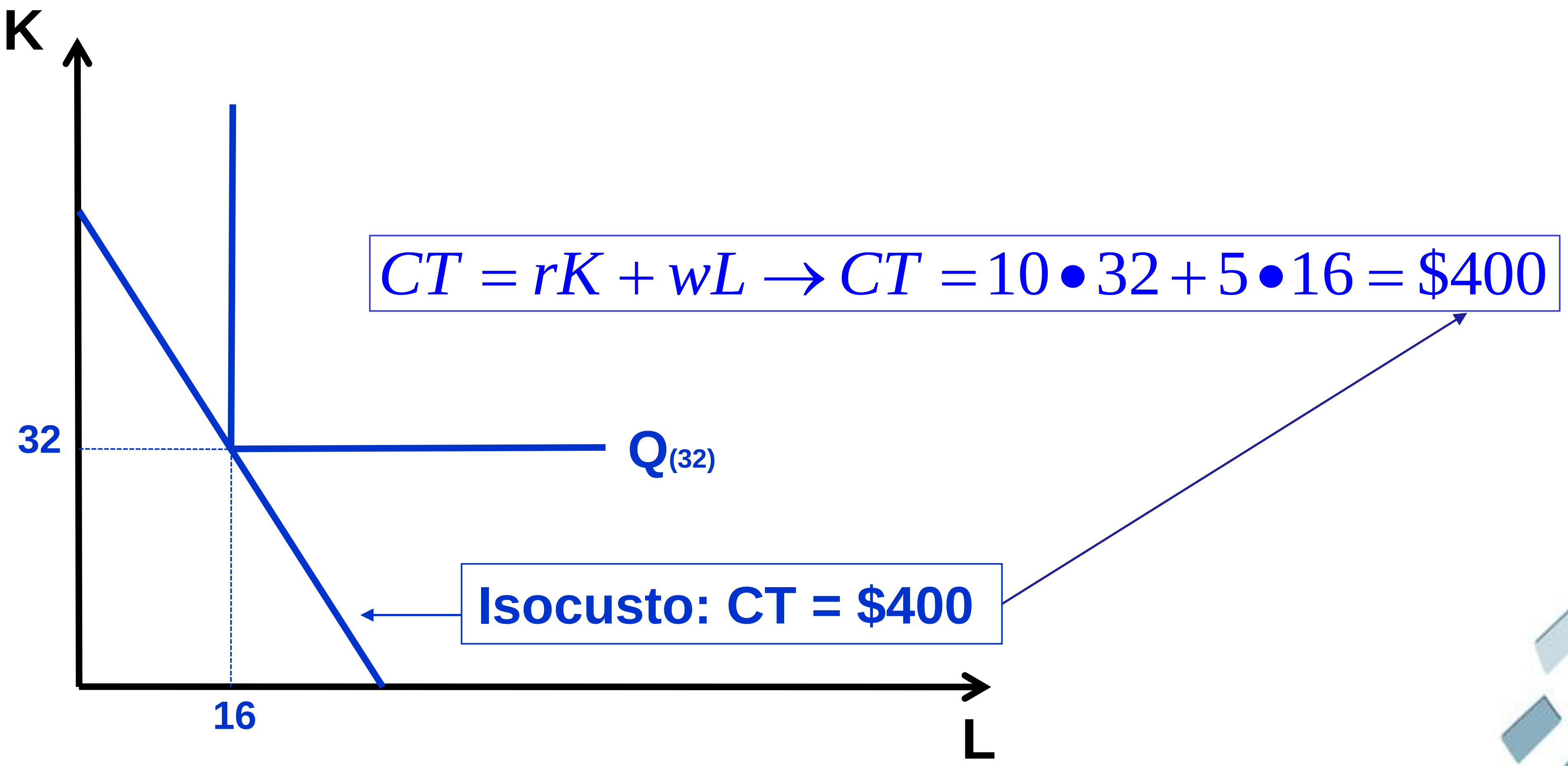
$$Q = 2L \rightarrow 32 = 2L \rightarrow \boxed{L = 16 \ , \ K = 32 \ e \ Q = 32.}$$

$$Logo: \ CT = rK + wL \rightarrow CT = 10 \bullet 32 + 5 \bullet 16 = \$400.$$

$$De \ outra \ forma$$

$$CT = Q\left(\frac{r}{\alpha} + \frac{w}{\beta}\right) \rightarrow CT = 32\left(\frac{10}{1} + \frac{5}{2}\right) = \$400$$

b) Proporções Fixas



c) Substitutos Perfeitos

$$\boxed{Q = \alpha K + \beta L}$$

- Dado que os fatores de produção são substitutos perfeitos, a firma utilizará o insumo mais barato, relativamente à sua produtividade.

- Logo, a função de custo será dada por:

$$\boxed{CT = \min\left\{\frac{r}{\alpha}, \frac{w}{\beta}\right\} Q}$$

c) Substitutos Perfeitos

- Logo, se r = 10 , w = 10 , α = 2 e β = 1 , a firma utilizará somente o fator de produção capital, pois r/PMgk < w/PMgL .

- Logo, para produzir 100 unidades a firma utilizará K = 50.

$$Q = \alpha K + \beta L \rightarrow Q = 2 \bullet 50 + 1 \bullet 0 = 100$$

- São 50 unidades de K com a PMgK = 2 $\rightarrow$ 100 unidades de produto.

$$Logo,\ \ CT = \min\left\{\frac{10}{2}, \frac{10}{1}\right\} 100 = \$500$$

- Observe que, caso a firma decidisse produzir 100 unidades utilizando somente L , seu custo seria igual a 1000 (100 unidades de L com a PMgL = 1, com w = \$10).

d) Função de Produção CES

$$\boxed{Q = \left(K^{\rho} + L^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}}}$$

- Vimos que, em equilíbrio: $\left(\dfrac{K}{L}\right)^{1-\rho} = \dfrac{w}{r}.$

- Como fizemos anteriormente, podemos resolver a condição de equilíbrio para K e para L, substituindo esses resultados na FDP.
- Posteriormente, resolvendo para K e para L, podemos encontrar as demandas condicionais para os fatores de produção capital e trabalho.

d) Função de Produção CES

$$K^C = Qr^{\frac{1}{\rho-1}}\left(r^{\frac{\rho}{\rho-1}} + w^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{-\frac{1}{\rho}}$$

$$L^C = Qw^{\frac{1}{\rho-1}}\left(r^{\frac{\rho}{\rho-1}} + w^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{-\frac{1}{\rho}}$$

- Substituindo as demandas condicionais na restrição de custo total, dada por CT = rK + wL , obtemos:

$$CT\left(Q, r, w\right) = Q\left(r^{\frac{\rho}{\rho-1}} + w^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{\frac{\rho-1}{\rho}}$$

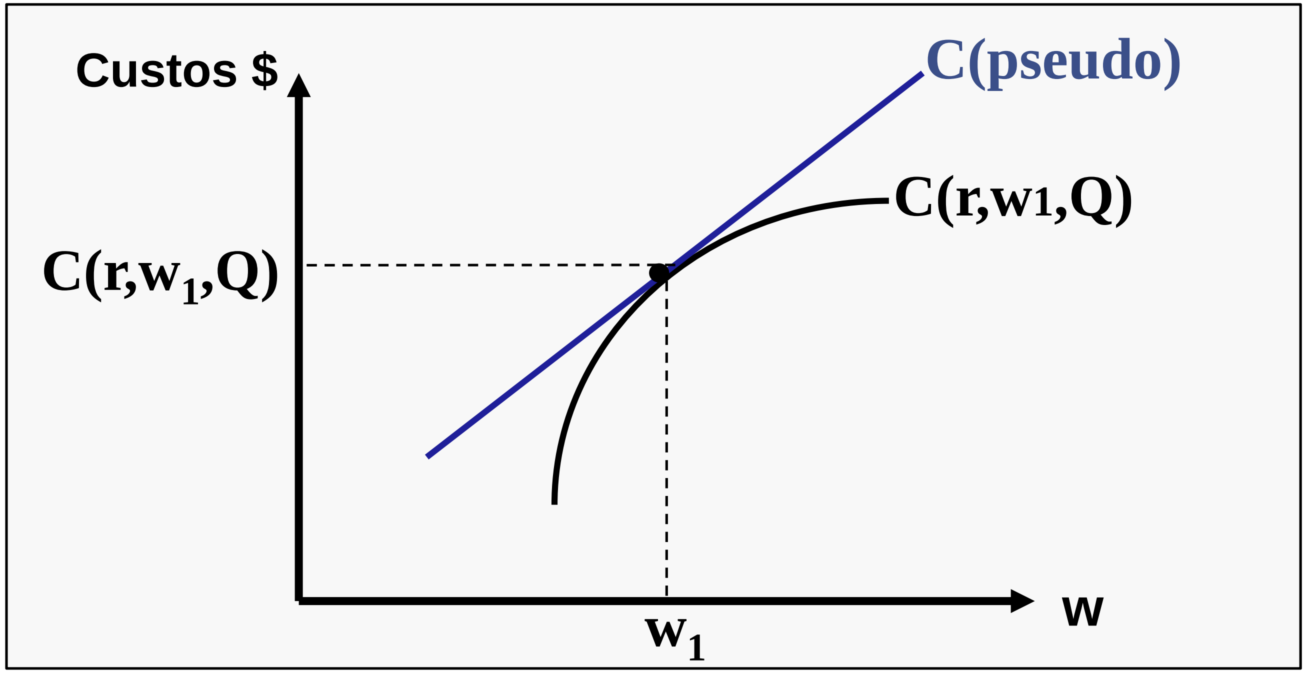
Propriedades das Funções de Custo

- **Homogeneidade:** as funções de custo que vimos anteriormente são todas homogêneas de grau um em relação aos preços dos fatores de produção.
  - Isto significa que, se dobrarmos os preços dos fatores de produção o custo total de determinada quantidade produzida também dobrará.
  - Uma implicação desse resultado é que um aumento na mesma proporção nos preços dos fatores de produção não irá alterar as decisões da firma com relação ao uso dos fatores de produção, mas a curva de custos será deslocada para cima.

- **A Função de Custo Total não é Decrescente em Q, r, e w:** partindo da hipótese de que, em uma situação inicial, a firma escolheu uma combinação de K e L minimizadora de custos, qualquer aumento em Q, r ou w aumentará o custo total.

Propriedades das Funções de Custo

- **A Função de Custo Total é Côncava em Relação aos Preços dos Fatores de Produção:** por exemplo, um aumento em w, mantendo constantes Q e r fará com que o custo total aumente em uma proporção inferior: uma firma minimizadora de custos alterará o conjunto de fatores de produção que utiliza para produzir determinada quantidade, fazendo com que seu custo efetivo, $CT(Q,r,w_1)$ não aumente de forma linear.



ANPEC 2002 - Questão 5

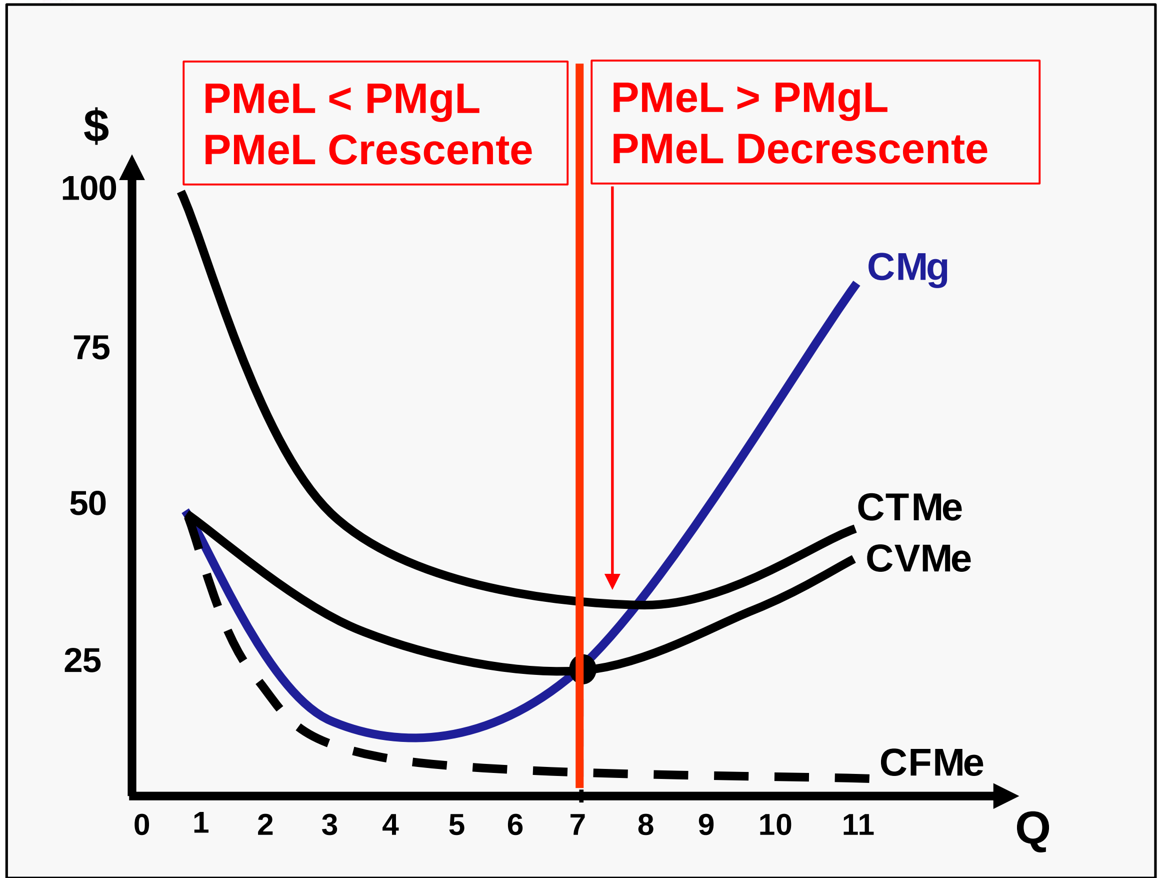
Com relação à teoria dos custos, é correto afirmar que:

0) A estrutura de custos de uma empresa não se altera quando o valor dos aluguéis aumenta, caso a firma tenha sua fábrica em terreno próprio. **F**

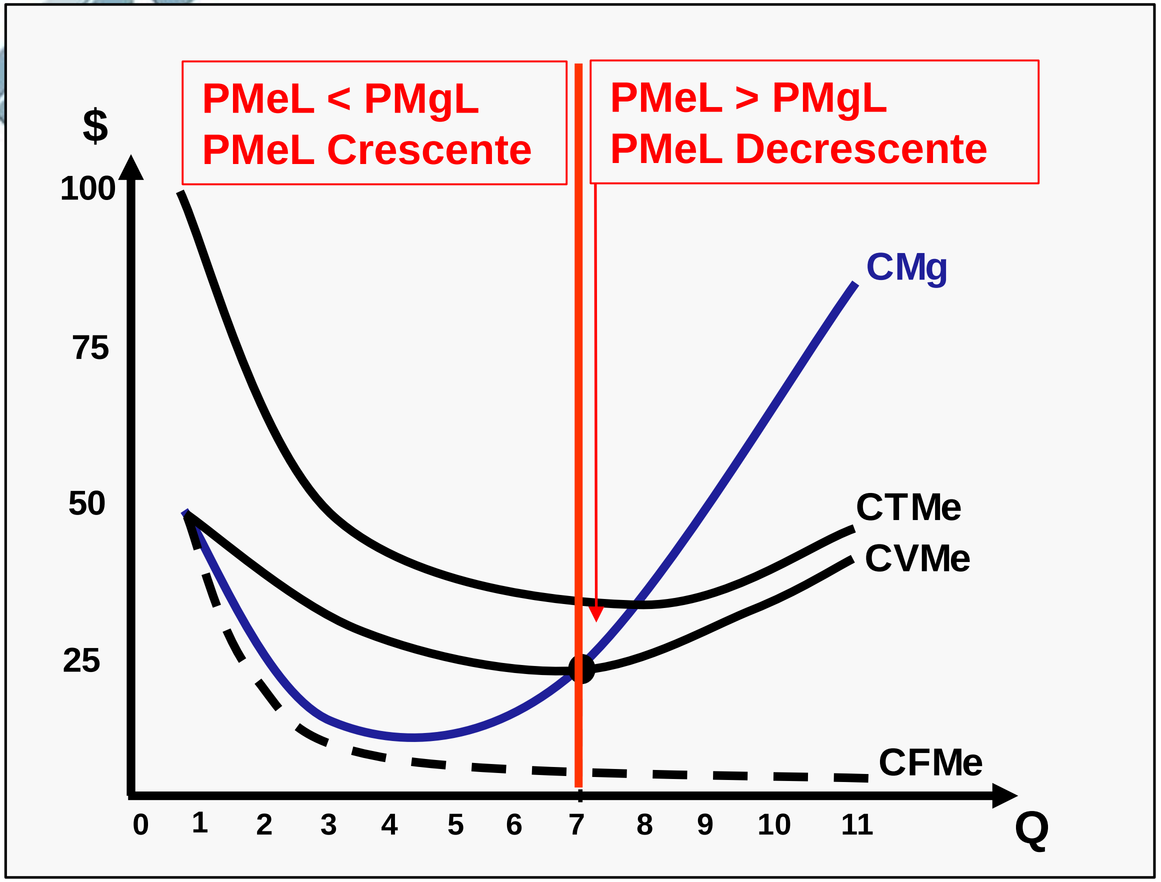
- Como vimos, o CTe engloba o custo de oportunidade. Portanto, quando o valor dos aluguéis aumenta, o Cte aumenta.

1) Sendo o trabalho o único fator variável, para níveis de produção em que o produto médio é maior que o produto marginal do trabalho, o custo médio é crescente. **F**

- Como vimos, quando o PMeL > PMgL o PMeL é decrescente, logo, o CVMe é crescente. Entretanto, o Cme é interceptado pela curva de CMg em um nível de produção acima daquele associado ao ponto de mínimo da curva de CVMe.



2) Quando o custo variável médio cresce, o custo marginal é maior que o custo médio. F



3) A área abaixo da curva de custo marginal de longo prazo até o nível de produção x é igual ao custo total associado à produção da quantidade x. V

- A área abaixo da curva de CMg de longo prazo inclui todos os custos variáveis envolvidos na produção de um bem. Vale lembrar que no longo prazo todos os insumos são variáveis, logo, não ha CF.

- **Assim:**

- no longo prazo, temos: $\int_0^{\bar{Q}} CMg = CT.$

- no curto prazo, temos: $\int_0^{\bar{Q}} CMg = CV.$ $\longrightarrow$

- Exemplo:

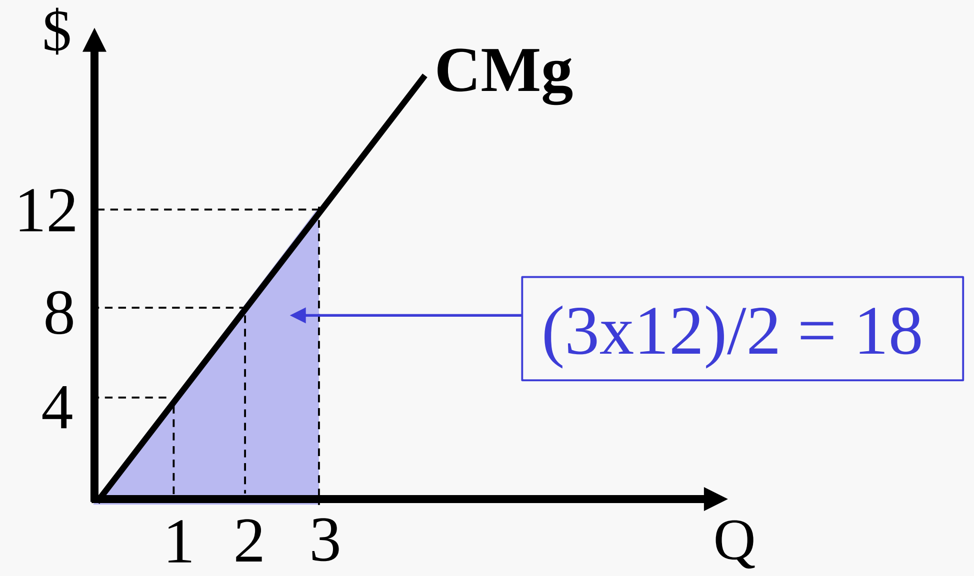
$$Seja:$$

$$CT = 100 + 2Q^2$$

$$\text{Logo}:$$

$$CV = 2Q^2$$

$$CMg = 4Q$$



$$CV_{(3)} = 2(3)^2 = \$18$$

4) A curva de custo médio de longo prazo é composta pelos pontos de mínimo das diversas curvas de custo médio de curto prazo. **F**

- A curva de CMe de longo prazo é a envoltória inferior das curvas de Cme de curto prazo.
- Cada curva de CMe de curto prazo é tangente à curva de CMe de longo prazo, mas, em geral, não toca o seu mínimo na curva de longo prazo. A única situação em que o CMe de longo prazo é tangente no mínimo da curva de CMe de curto prazo é no ponto onde se atinge a escala ótima.

ANPEC 2003 - Questão 4

Em relação à teoria dos custos, analise as proposições:

0) Seja $4y^2 + 100y + 100$ o custo total de uma firma, em que y é o produto. Se y = 25, o custo variável médio será 204. **F**

$$CT = 4y^2 + 100y + 100$$

$$Logo:$$

$$CV = 4y^2 + 100y \ e \ CVMe = \frac{4y^2 + 100y}{y} = 4y + 100$$

$$Assim: \ CVMe_{(25)} = 4(25) + 100 = 200$$

1) Seja $S_i(p) = p/2$ a curva de oferta da firma i. Se forem produzidas 3 unidades, o custo variável total será 9. V

- Sabendo que a curva de oferta de uma firma corresponde à curva de custo marginal para o nível de produção acima daquele para o qual o preço iguala-se ao custo variável médio, temos que a curva de custo marginal correspondente será dada por: p = 2q.
- A curva de custo variável pode, então, ser obtida através da integral da curva de custo marginal, variando de 0 a 3, da seguinte forma:

$$CV = \int_0^3 CMg \; dq = \int_0^3 2q \; dq = q^2 \Big|_0^3 = 3^2 - 0^2 = 9$$

2) Sejam $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^{\frac{1}{2}}$ a função de produção de uma firma e w_1 e w_2, os preços de x_1 e x_2, respectivamente. Supondo que $w_1 > w_2$, a minimização de custos requer que $x_1 = 0$. **V**

- Observe que os fatores de produção são substitutos perfeitos. Adicionalmente, a $PMgx_1 = PMgx_2$. Logo, nesse caso, a firma utilizará somente o fator de produção mais barato (x_2). Por isso, $x_1 = 0$.

3) Seja $c(y) = 3y + 10$, para $y > 0$, função de custo de curto prazo de uma firma. Para $c(0) = 6$, o custo quase fixo será 4. V

- O custo quase-fixo é a diferença entre o custo fixo para algum nível de produção e o custo de não produzir.

- Logo, $C_{qf} = \underbrace{10}_{CF} - \underbrace{6}_{\text{Custo de não produzir : } C(0) = 6} = 4$

4) Uma firma opera duas plantas. Para minimizar custos, esta firma deve aumentar a produção na planta onde o custo médio for menor e reduzir a produção onde o custo médio for maior. **F**

- Essa questão nós veremos com mais detalhes em monopólio, quando a firma opera com duas plantas.
- Ela deverá distribuir a produção entre duas fábricas da seguinte forma: produzir mais na fábrica onde o CMg for menor, até que $CMg_1 = CMg_2$.

ANPEC 2009 - Questão 4

Seja $Q = K^{\alpha} L^{1-\alpha}$ uma função de produção Cobb-Douglas. Julgue as afirmativas a seguir:

- Primeiramente, observe que trabalhamos com um caso mais geral. Nesse caso, temos que 1- α = β e $\alpha + \beta$ = 1.

0) A demanda condicional pelo fator trabalho é L* = Q. **F**

- Mesmo sem fazer qualquer conta, sabemos que a afirmação é falsa, pois uma Cobb-Douglas não tem a demanda por trabalho igual a Q.
- De Qualquer modo, calculamos anteriormente a demanda condicional por L no caso de uma Cobb-Douglas e vimos que ela é dada por:

$$\boxed{L^C = \left(\frac{Q}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{r}{w}\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}}$$

1) Supondo que a quantidade produzida seja de 3 unidades, a remuneração do trabalho igual a 1, a remuneração do capital igual a 1 e que $\alpha = 0{,}5$, temos que a quantidade de trabalho demandada é igual a 3. **V**

- Como α = 0,5 , nesse caso, $\beta = (1 - \alpha)$ = 0,5. Logo:

$$L^C = \left(\frac{Q}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{r}{w}\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \rightarrow L^C = \left(\frac{3}{1}\right)^{\frac{1}{1}} \left(\frac{1}{1}\frac{0,5}{0,5}\right)^{\frac{0,5}{1}} = 3$$

2) No longo prazo, a função de custo associada a essa função de produção é do tipo ESC, sendo que a elasticidade de substituição entre os fatores é 0,25. **F**

- Como vimos, a elasticidade de substituição de uma Cobb-Douglas é igual a 1.

3) Supondo os mesmos dados do item 1, temos que o custo total de produção é igual a 6. **V**

- Vimos que a demanda condicional por L = 3. Adicionalmente:

$$K^C = \left(\frac{Q}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha w}{\beta r}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \rightarrow K^C = \left(\frac{3}{1}\right)^{\frac{1}{1}} \left(\frac{0,5}{0,5} \bullet \frac{1}{1}\right)^{0,5} = 3$$

$$Logo : CT = rK + wL \rightarrow CT = 1(3) + 1(3) = 6$$