CORECON-RJ

CONSELHO REGIONAL DE ECONOMIA

Microeconomia - ANPEC

Bens Públicos

Prof.: Antonio Carlos Assumpção

Bens Públicos

- A maioria dos bens é alocada em mercados nos quais os compradores pagam pelo bem e os vendedores são pagos pelo que fornecem: são os **bens privados**.
- Quando um bem é **"gratuito"**, as forças de mercado que alocam os recursos inexistem.
- Examinaremos agora os bens que **não possuem preço de mercado**.
- Quando um bem não possui preço, os mercados privados não conseguem garantir que ele seja produzido e consumido em quantidades apropriadas.
- Neste caso, há espaço para o governo intervir (para tentar remediar a **falha de mercado** e aumentar o bem estar econômico).

Bens Públicos, Bens Privados, Recursos Comuns e Monopólios Naturais

- **Diferentes Tipos de Bens:**
  - Podemos classificar os bens de acordo com duas características. Para isso, devemos responder duas perguntas:
    - O bem é excludente ?
    - O bem é rival ?

- **Bens Rivais (disputáveis):** o fato de uma pessoa consumir o bem reduz a possibilidade de consumo para qualquer outra pessoa.

- **Bens Excludentes (exclusivos)**: as pessoas podem ser impedidas de consumi-los.
  - As leis reconhecem os direitos de propriedade.

Bens Públicos, Bens Privados, Recursos Comuns e Monopólios Naturais

		Rival	
		Sim	**Não**
Excludente	**Sim**	**Bens Privados** • Sorvetes • Roupas • Estradas com pedágio congestionadas	**Monopólios Naturais** • Educação Privada • TV a cabo • Estradas com pedágio não congestionadas
	Não	**Recursos Comuns** • Peixes do mar • Meio ambiente • Estradas sem pedágio congestionadas	**Bens Públicos** • Defesa nacional • Conhecimento • Estradas sem pedágio não congestionadas

Bens de Clube

Bens Públicos, Bens Privados,
Recursos Comuns e Monopólios Naturais

- **Portanto:**
  - **Bens Privados:** Rivais e Excludentes
  - **Bens Públicos:** Não Rivais e Não Excludentes
  - **Recursos Comuns:** Rivais e Não Excludentes
  - **Monopólios Naturais:** Não Rivais e Excludentes

Bens Públicos

- **Bens Públicos**
  - **São bens não rivais (não disputáveis):** podem ficar disponíveis para todos sem que seja afetada a oportunidade do seu consumo para qualquer outra pessoa.
    - Observe então que o custo marginal de prover o bem para um consumidor adicional é zero para qualquer nível de produção.
  - **São bens não excludentes (não exclusivos):** as pessoas não podem ser impedidas de consumi-los.

Bens Públicos

- **Provisionamento de Bens Públicos e Falhas de Mercado**
  - A oferta dos bens públicos precisa ser financiada.
  - Quanto você consumiu de segurança pública no ano ?
  - Você pagaria para utilizar uma rua com iluminação pública ?
    - Quanto você pagaria ?

- **O Problema do Carona.**
  - **Carona (*free-rider*):** alguém que recebe o benefício de um bem ou serviço, mas não paga por ele.

Bens Públicos

- As pessoas não podem ser excluídas de utilizar um bem público (ou é muito caro fazê-lo). Portanto, os indivíduos evitam pagar por ele esperando que outros indivíduos o façam.
- O problema do carona impede que os mercados privados ofereçam bens públicos.
- **O Problema dos Caronas**
  - A provisão de alguns bens ou serviços necessariamente beneficia todos os indivíduos.
  - Os indivíduos não têm incentivo a pagar o valor que atribuem ao bem pelo direito de consumi-lo.
  - Os caronas subestimam o valor de um bem ou serviço com o objetivo de usufruir de seus benefícios sem ter de pagar por eles.
- O governo pode beneficiar a todos oferecendo o bem público e pagando por ele com receitas de impostos.

Bens Públicos

- **Bens Públicos:**
  - **Papel do Governo na Provisão dos Bens Públicos**
  - Quando o governo deverá prover um bem público ?
    - Como ocorre com outros bens, um bem público deve ser ofertado quando o benefício marginal de uma unidade adicional é ao menos tão grande quanto o custo marginal daquela unidade.
  - **A Análise de Custo-Benefício:** compara os custos e os benefícios decorrentes da provisão de um bem público, para a sociedade.
    - Dificuldades desta análise.

Um Exemplo da Provisão de Bens Públicos

- Suponha a existência de apenas dois consumidores no mercado que demandam um certo bem público. Suponha ainda que eles possam ser representados pelas seguintes curvas de demanda:

$$Consumidor\ \ 1: \quad P_1 = 100 - Q$$

$$Consumidor\ \ 2: \quad P_2 = 200 - Q$$

→ Curvas de Benefício Marginal de cada um dos consumidores, supondo que eles declarem o valor verdadeiro que atribuem ao bem.

- Como determinar a quantidade eficiente a ser ofertada do bem público, se o CMg = $240 ? E se o CMg = 50 ?

Um Exemplo da Provisão de Bens Públicos

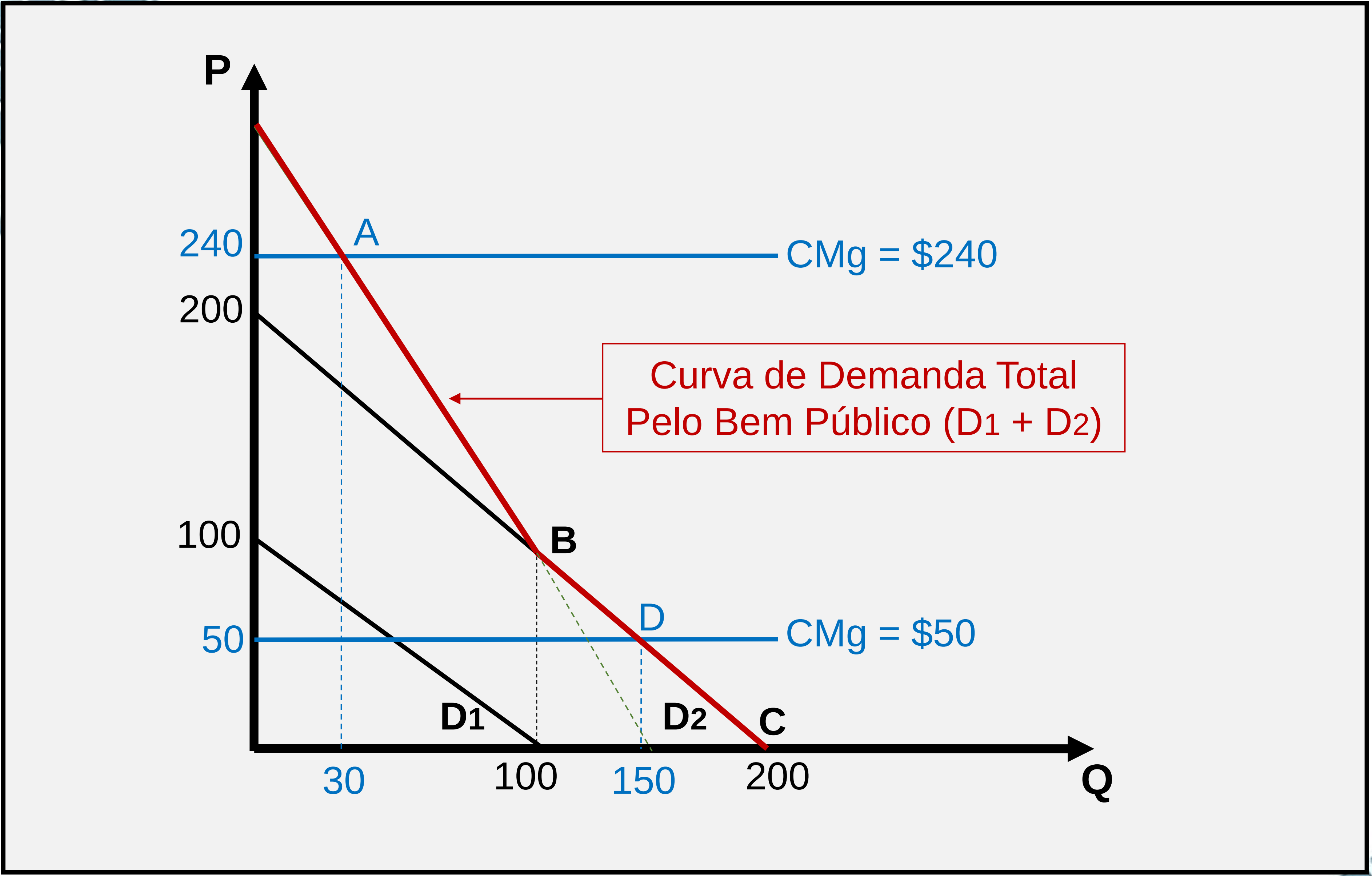
- A curva de Benefício Marginal Social (BMS) de um bem público é a soma vertical das curvas de demanda do consumidor, pois desta forma estamos somando os preços (disposição a pagar). Logo, temos:

$$P_1 = 100 - Q$$
$$P_2 = 200 - Q$$
$$P = 300 - 2Q \longrightarrow \boxed{\text{Curva de BMS}}$$

- Logo, se o CMg = \$240, temos: $300 - 2Q = 240 \Rightarrow Q^* = 30.$

- Se o CMg = \$50, devemos observar que a curva de BMS entre B e C é igual a D_2 . Sobre essa região de produção a curva de demanda para o consumidor 1 está ao longo do eixo horizontal, de modo que $P_1 = 0$. Portanto, BMS = 200 – Q. Quando fazemos BMS = CMg, ou 200 – Q = 50, obtemos Q = 150.

Um Exemplo da Provisão de Bens Públicos



Observação: Os Bens SemiPúblicos

- São bens oferecidos tanto pelo governo quanto pelo setor privado, tendo em vista limites na produção privada ou limites na renda da população para alcançar estes bens.
- Note então, que estão sujeitos ao princípio da exclusão, quando ofertados pelo setor privado.

- Exemplo: saúde, educação,...

Bens Públicos: Formalizando os Conceitos.

- **Provisão de Bens Públicos. Suponha:**
  - Dois indivíduos (**1** e **2**), colegas de quarto.
  - Riqueza inicial de cada indivíduo: $\boldsymbol{w_1}$ e $\boldsymbol{w_2}$.
  - Contribuição de cada um pela compra de uma TV: $\boldsymbol{g_1}$ e $\boldsymbol{g_2}$.
  - "Sobra" de renda para outros bens (bens privados): $\boldsymbol{x_1}$ e $\boldsymbol{x_2}$.
  - Logo, as Restrições Orçamentárias são: $\boldsymbol{x_1 + g_1 = w_1}$ *e* $\boldsymbol{x_2 + g_2 = w_2}$.
  - Custo da TV igual a $\boldsymbol{c}$ unidades monetárias. Logo, para comprá-la, a soma das contribuições deve ser pelo menos $\boldsymbol{c} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{g_1 + g_2 \geq c}$.
  - Essa última equação resume a tecnologia disponível para ofertar o bem público: os colegas de quarto podem adquirir uma TV se pagarem, juntos, o custo $\boldsymbol{c}$.

Bens Públicos

- **Funções de utilidade dos dois agentes:**

$$u_1(x_1, G) \quad e \quad u_2(x_2, G)$$
$$G = 0 \quad sem\ TV$$
$$G = 1 \quad com\ TV$$

- A utilidade do indivíduo dependerá do **seu consumo de bens privados** e da disponibilidade da TV, o **bem público**.
- O consumo privado de cada indivíduo possui um subscrito para indicar se o bem é consumido pelo indivíduo 1 ou pelo indivíduo 2, mas o bem público não possui subscrito, pois ele é “consumido” conjuntamente.

Bens Públicos

- Podemos medir o valor que cada um atribui aos serviços da TV através do preço de reserva de cada um.
- Sejam os preços de reserva representados por $r_1 \; e \; r_2$.
- Logo:
  - Se o indivíduo 1 paga o preço de reserva pela TV, ele terá $w_1 - r_1$ disponível para o consumo de bens privados.
  - Se o indivíduo 1 opta por não comprar a TV, ele terá w_1 disponível para o consumo privado.
- Como o mesmo vale para o indivíduo 2, caso eles sejam indiferentes entre as duas alternativas, teremos:

$$u_1(w_1 - r_1, 1) = u_1(w_1, 0) \qquad (I)$$

$$u_2(w_2 - r_2, 1) = u_2(w_2, 0) \qquad (II)$$

Definição do preço de reserva de cada um pela TV.

Bens Públicos

- Nesse tipo de problema existem dois tipos de alocação que são possíveis:
  - Se a TV não é fornecida, ambos os indivíduos gastam a sua riqueza em bens privados: $(w_1, w_2, 0)$.
  - Se a TV é fornecida, teremos: $(x_1, x_2, 1)$.
  - Onde:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= w_1 - g_1 \\ x_2 &= w_2 - g_2 \end{aligned}}$$

O consumo privado de cada indivíduo é determinado pela riqueza que restou após a contribuição para o bem público.

Bens Públicos

- Sob quais condições a TV deve ser fornecida ?
- Haverá uma melhoria de Pareto para prover a alocação $(x_1, x_2, 1)$ se ambas os indivíduos estiverem melhor por terem a TV do que por não a terem. Logo, quando:

$$u_1(w_1, 0) < u_1(x_1, 1)$$
$$u_2(w_2, 0) < u_2(x_2, 1)$$

- Utilizando a definição de preço de reserva e as restrições orçamentárias:

$$[u_1(w_1 - r_1, 1) = u_1(w_1, 0)] \; < \; [u_1(x_1, 1) = u_1(w_1 - g_1, 1)]$$
$$[u_2(w_2 - r_2, 1) = u_2(w_2, 0)] \; < \; [u_2(x_2, 1) = u_2(w_2 - g_2, 1)]$$

Bens Públicos

$$\left[u_1(w_1 - r_1, 1) = u_1(w_1, 0)\right] < \left[u_1(x_1, 1) = u_1(w_1 - g_1, 1)\right]$$

$$\left[u_2(w_2 - r_2, 1) = u_2(w_2, 0)\right] < \left[u_2(x_2, 1) = u_2(w_2 - g_2, 1)\right]$$

- Se olharmos os lados direito e esquerdo dessa desigualdade e nos lembrarmos de que o aumento do consumo privado provoca aumento da utilidade, podemos concluir que:

$$\left(w_1 - r_1\right) < \left(w_1 - g_1\right) \Rightarrow r_1 > g_1$$

$$\left(w_2 - r_2\right) < \left(w_2 - g_2\right) \Rightarrow r_2 > g_2$$

- Essa condição terá de ser satisfeita se a alocação $(w_1, w_2, 0)$ for eficiente no sentido de Pareto: é preciso que a contribuição de cada indivíduo para a compra da TV seja menor que a sua propensão a pagar pelo aparelho.

Bens Públicos

- Se o indivíduo pudesse adquirir o bem por um valor menor do que o máximo que ele está disposto a pagar (preço de reserva), isso o beneficiaria.

- Portanto, a condição de que o preço de reserva exceda a parcela de custo nos diz que ocorrerá uma melhoria de Pareto quando cada indivíduo puder adquirir a TV por um valor inferior ao máximo que estaria propenso a pagar.

$$Como \ \ g_1 + g_2 = c \ \ \Rightarrow \ \ r_1 + r_2 > g_1 + g_2 = c$$

Bens Públicos

- Assim, a condição necessária para eficiência de Pareto com a compra da TV (bem público) é dada por:

$$\boxed{\begin{aligned} u_1(x_1,1) &> u_1(w_1,0) \\ u_2(x_2,1) &> u_2(w_2,0) \end{aligned}}$$

- E a condição suficiente é dada por:

$$\boxed{r_1 + r_2 > g_1 + g_2 = c}$$

- Se essa condição for satisfeita, haverá algum plano de pagamento fará com que ambos os indivíduos melhorem pela provisão do bem público.

Bens Públicos

- A condição que descreve quando a provisão do bem público será uma melhoria de Pareto depende apenas da propensão do indivíduo a pagar e do custo total. Se a soma dos preços de reserva exceder o custo da TV, haverá sempre algum plano de pagamento fará com que ambos os indivíduos melhorem pela provisão do bem público.

- A condição de que a provisão do bem público seja eficiente no sentido de Pareto, ou não, dependerá, geralmente, da distribuição inicial da riqueza, pois, em geral, os preços de reserva dependem dessa distribuição.
  - Imagine que um indivíduo (1) adora TV e o outro (2) se mostra indiferente com respeito a sua aquisição.
  - Se o indivíduo 1 possui toda a riqueza, ele estará disposto a pagar mais do que o custo da TV. Portanto, seria uma melhoria de Pareto prover a TV.
  - Se o indivíduo 2 possui toda a riqueza, o indivíduo 1 não teria dinheiro para contribuir para a compra e, portanto, seria eficiente no sentido de Pareto não prover a TV.

Bens Públicos

- **Provisão de Bens Públicos e Preferências Quase Lineares**

- Em geral, a questão de se o bem público deve ou não ser fornecido dependerá da distribuição da riqueza.
- Entretanto, em casos específicos, a provisão do bem público pode independer da distribuição da riqueza.
- Se as preferências forem **quase lineares**, os **preços de reserva independerão da quantidade de riqueza** e, portanto, **a provisão ótima do bem público independerá da riqueza**, respeitada a condição de que $r_i \leq w_i$.

Bens Públicos

- Se os dois colegas de quarto cooperam e revelam suas preferências verdadeiras, teremos uma solução ótima.

- Entretanto, se $r_1 > c$ e $r_2 > c$, o indivíduo 1 pode mentir para pegar carona. Nesse caso, ele declara $r_1 = 0$.

- Mas o indivíduo 2 também pode mentir...

- **A Teoria dos Jogos** trata dessa interação estratégica.

Bens Públicos

- Suponha dois agentes, com riqueza de \$500 cada $\rightarrow w_1 = w_2 = 500$.
- Cada um atribui um valor de \$100 à TV $\rightarrow r_1 = r_2 = 100$.
- O custo da TV é \$150 $\rightarrow r_1 + r_2 > c = 150$.
- Não existe a possibilidade de um agente impedir o outro de ver TV caso ela seja comprada.

- Note que, como a soma dos preços de reserva supera o custo da TV, é eficiente no sentido de Pareto comprar a TV.

Bens Públicos

- Comprando sozinho, o consumidor 1 terá o benefício $r_1 = 100$ e o custo $g_1 = c = 150$. Portanto, um prejuízo líquido igual a -50.
- Neste caso, o consumidor 2 terá o benefício $r_2 = 100$ e o custo $g_2 = 0$. Portanto, um benefício líquido de 100.
- O mesmo raciocínio se aplica se o consumidor 2 comprar sozinho.
- Se ninguém comprar, não haverá benefício.
- A matriz de *payoffs* é dada a seguir.
- Em (0, 0) ocorre o equilíbrio de Nash com estratégias dominantes.
- Ninguém compra.

		Agente B	
		Compra Sozinho	**Não Compra**
Agente A	**Compra Sozinho**	-50 , -50	-50 , 100
	Não Compra	100 , -50	0 , 0

Bens Públicos

- Logo, nesse jogo, o equilíbrio com estratégias dominantes consiste em nenhum dos jogadores comprar a TV.
- Se o jogador A decidir comprar a TV, será do interesse do jogador B pegar carona: ver televisão sem contribuir com nada para adquiri-la.
- Se o jogador B decidir comprar a TV, será do interesse do jogador A pegar carona: ver televisão sem contribuir com nada para adquiri-la.
- Se um dos jogadores decide não comprar a TV, será de interesse do outro também não comprar.
- Note que esse jogo é parecido com o dilema dos prisioneiros, mas não é exatamente igual a ele.
  - No dilema dos prisioneiros a estratégia que maximizava a soma dos *payoffs* dos jogadores consistia em os jogadores fazerem a mesma escolha.
  - Nesse caso, a estratégia que maximiza o *payoff* conjunto consiste em apenas um dos jogadores comprar a TV, onde ambos assistiriam TV [(-50,100) ou (100,-50)].

Bens Públicos

- Em vez de simplesmente pensarmos na decisão de comprar ou não ($G = 1$ ou $G = 0$), podemos supor que ambos contribuam para comprar uma TV de qualidade G, tendo que gastar $c(G)$, onde quanto maior a qualidade G, maior o custo c.

- Nesse caso, estamos pensando em um problema que responda a seguinte pergunta: **quanto** prover do bem público ?

- Nesse caso, a restrição orçamentária é dada por:

$$\boxed{x_1 + x_2 + c(G) = w_1 + w_2}$$

- Uma vez comprada a TV, chega-se à eficiência onde a utilidade de um agente não pode mais ser aumentada sem, com isso, reduzir a do outro.

Bens Públicos

- Devemos maximizar a utilidade do agente 1 sujeita ao fato de que a utilidade do agente 2 fique constante (ou aumente) e de que a restrição orçamentária seja obedecida.
- Dito de outro modo, a alocação eficiente no sentido de Pareto é aquela em que o agente 1 está tão bem quanto possível, dado o nível de utilidade do agente 2 (na pior das hipóteses).
- Logo, temos:

$$\textit{Alocação Eficiente de Pareto:}$$

$$\max_{x_1, x_2, G} u_1(x_1, G)$$

$$S.a. \begin{cases} u_2(x_2, G) = \bar{u}_2 \\ x_1 + x_2 + c(G) = w_1 + w_2 \end{cases}$$

Bens Públicos

- Desta forma, o lagrangeano é dado por:

$$L = u_1(x_1, G) - \lambda\left[u_2(x_2, G) - \bar{u}_2\right] - \mu\left[x_1 + x_2 + c(G) - w_1 - w_2\right]$$

Condições de Primeira Ordem

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \rightarrow \frac{\partial u_1(x_1, G)}{\partial x_1} - \mu = 0 \qquad (I)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \rightarrow -\lambda \frac{\partial u_2(x_2, G)}{\partial x_2} - \mu = 0 \qquad (II)$$

$$\frac{\partial L}{\partial G} = 0 \rightarrow \frac{\partial u_1(x_1, G)}{\partial G} - \lambda \frac{\partial u_2(x_2, G)}{\partial G} - \mu \frac{\partial c(G)}{\partial G} = 0 \qquad (III)$$

Bens Públicos

- A condição *(III)* pode ser escrita como:

$$\frac{\partial c(G)}{\partial G} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial u_1(x_1,G)}{\partial G} - \frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial u_2(x_2,G)}{\partial G} \qquad (IV)$$

- De *(I)* e *(II)*, obtemos:

$$(I) \rightarrow \frac{\partial u_1(x_1,G)}{\partial x_1} = \mu \qquad (V)$$

$$(II) \rightarrow -\frac{\partial u_2(x_2,G)}{\partial x_2} = \frac{\mu}{\lambda} \rightarrow \frac{\lambda}{\mu} = -\frac{1}{\frac{\partial u_2(x_2,G)}{\partial x_2}} \qquad (VI)$$

Bens Públicos

- Finalmente, aplicando *(V)* e *(VI)* em *(IV):*

$$\frac{\partial c(G)}{\partial G} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial u_1(x_1,G)}{\partial G} - \frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial u_2(x_2,G)}{\partial G} \qquad (IV)$$

$$\frac{\partial u_1(x_1,G)}{\partial x_1} = \mu$$

$$\frac{\lambda}{\mu} = -\frac{1}{\frac{\partial u_2(x_2,G)}{\partial x_2}}$$

$$\frac{\partial c(G)}{\partial G} = \frac{1}{\frac{\partial u_1(x_1,G)}{\partial x_1}}\frac{\partial u_1(x_1,G)}{\partial G} + \frac{1}{\frac{\partial u_2(x_2,G)}{\partial x_2}}\frac{\partial u_2(x_2,G)}{\partial G}$$

Bens Públicos

- Portanto, a condição ótima apropriada para esse problema é:

$$\frac{\partial c(G)}{\partial G} = \frac{\dfrac{\partial u_1(x_1, G)}{\partial G}}{\dfrac{\partial u_1(x_1, G)}{\partial x_1}} + \frac{\dfrac{\partial u_2(x_2, G)}{\partial G}}{\dfrac{\partial u_2(x_2, G)}{\partial x_2}}$$

$$CMa(G) = |TMS_1| + |TMS_2|$$

- Tal condição nos diz que a soma dos valores absolutos das Taxas Marginais de Substituição entre o bem privado e o bem público dos dois consumidores deve ser igual ao custo marginal de prover uma unidade adicional do bem público.

Bens Públicos

- **Condição de Eficiência Para a Provisão do Bem Público**

$$\boxed{|TMS_1| + |TMS_2| = CMa(G)}$$

- TMS_i : propensão marginal a pagar por unidade adicional do bem público.

- A soma das propensões marginais a pagar pelo bem público iguala seu custo marginal.
  - Se soma das propensões marginais a pagar pelo bem público excede seu custo marginal, é eficiente prover mais do bem público.
  - Se soma das propensões marginais a pagar pelo bem público é menor que seu custo marginal, é eficiente prover menos do bem público.

Bens Públicos

- Por exemplo, suponha que: $|TMS_1| = 1/4$, $|TMS_2| = 1/2$ e $CMa(G) = 1$.

  $$\textit{Logo}: |TMS_1| + |TMS_2| = (3/4) < 1 = CMa(G).$$

- Se o preço do bem privado for igualado ao preço do bem público em \$1 por unidade, $|TMS_1| = 1/4$ significa que o consumidor 1 aceitaria \$1/4 a mais do bem privado por \$1 de redução do bem público, e $|TMS_2| = 1/2$ significa que o consumidor 2 aceitaria \$1/2 a mais do bem privado por \$1 de redução do bem público.
- Suponha que o bem público seja reduzido em uma unidade e que, portanto, economizamos um dólar. Para compensar, oferecemos os 3/4 de dólar que os consumidores desejam e sobra 1/4 de dólar. Se este 1/4 de dólar for repartido entre os consumidores, ambos melhorariam sua situação, o que demonstra ineficiência.
- Portanto, se a soma dos benefícios marginais de se pagar pelo bem público for maior do que o custo marginal de produzi-lo, será apropriado fornecer mais do bem público.

Bens Públicos

- A condição de eficiência para os bens privados é que a ***TMS* de cada** consumidor se iguale ao custo marginal, enquanto que para o bem público a condição de eficiência é que a **soma das *TMS*** de cada consumidor se iguale ao custo marginal.
- Embora cada consumidor possa consumir diferentes quantidades do bem privado, cada consumidor atribui ao bem o mesmo valor na margem; caso contrário, eles se engajariam na troca.
- **No caso do Bem Público, cada consumidor deve consumir a mesma quantidade do bem público, embora cada um atribua um valor diferente para ele na margem.**

Bens Públicos

- **Portanto:**

- Condição de Eficiência Para um Bem Privado:

$$\boxed{|TMS_1| = |TMS_2| = CMa(x)}$$

  - Cada pessoa consome sua quantidade, e todos atribuem o mesmo valor para o bem na margem.

- Condição de Eficiência Para um Bem Público:

$$\boxed{|TMS_1| + |TMS_2| = CMa(G)}$$

  - Todos consomem a mesma quantidade, mas os agentes podem atribuir diferentes valores ao bem na margem.

Bens Públicos

- **Suponha que:**

$$u_1(G, x_1) = 0{,}3\,ln(G) + ln(x_1),$$
$$u_2(G, x_2) = 0{,}7\,ln(G) + ln(x_2)$$
$$c(G) = G$$

$$Condição\ de\ Eficiência \Rightarrow |TMS_1| + |TMS_2| = CMa(G)$$

$$\frac{0{,}3/G}{1/x_1} + \frac{0{,}7/G}{1/x_2} = 1 \rightarrow \frac{0{,}3x_1}{G} + \frac{0{,}7x_2}{G} = 1 \rightarrow 0{,}3x_1 + 0{,}7x_2 = G$$

$$x_1 + x_2 + G = 1000$$
$$0{,}3x_1 + 0{,}7x_2 - G = 0$$

A escolha de G depende da riqueza dos indivíduos

Bens Públicos

$$\begin{aligned} x_1 + \quad x_2 + G &= 1000 \\ 0{,}3x_1 + \quad 0{,}7x_2 \quad - G &= 0 \end{aligned}$$

$$Logo: G = 1000 - x_1 - x_2$$

$$0{,}3x_1 + \quad 0{,}7x_2 \quad -\left(1000 - x_1 - x_2\right) = 0 \rightarrow 1{,}3x_1 + \quad 1{,}7x_2 \quad -1000 = 0$$

$$x_1 = \frac{1000 - 1{,}7x_2}{1{,}3} \Rightarrow$$

$$Se \;\; x_2 = 100 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 638{,}46 \\ G = 261{,}54 \end{cases}$$

$$Se \;\; x_2 = 300 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 376{,}92 \\ G = 323{,}08 \end{cases}$$

Nesse caso, G eficiente depende da riqueza dos indivíduos.

Bens Públicos

- Agora, suponha que as funções utilidade sejam quase lineares.

$$u_1(G, x_1) = x_1 + 0{,}3\,ln(G)$$
$$u_2(G, x_2) = x_2 + 0{,}7\,ln(G)$$
$$c(G) = G$$

$$Condição\ de\ Eficiência \Rightarrow |TMS_1| + |TMS_2| = CMa(G)$$
$$\frac{0{,}3/G}{1} + \frac{0{,}7/G}{1} = 1 \rightarrow \frac{1}{G} = 1 \rightarrow G = 1$$

$$x_1 + x_2 + G = 1000 \Rightarrow x_1 + x_2 = 999 \Rightarrow x_1 = 999 - x_2$$

$$Se\ x_2 = 100 \Rightarrow x_1 = 899,\ G = 1$$
$$Se\ x_2 = 300 \Rightarrow x_1 = 699,\ G = 1$$

Nesse caso, G eficiente independe da riqueza dos indivíduos.

Provisão de Bens Públicos

- **O Problema do Carona**
  - Mercado funcionará para provisionar Bens Públicos ?
  - Mercado vai gerar alocações eficientes dos Bens Públicos ?
- Em geral, os mercados privados geram pouca (ou nenhuma) provisão (oferta) de bens públicos.

- **Mecanismos de Oferta de Bens Públicos.**
  - Mecanismo de comando.
  - Sistema de votação.
    - Mecanismos de incentivo para revelação da preferência por Bens Públicos.

Provisão de Bens Públicos

- **Mecanismo de Comando**
- A produção de um bem público pelo governo é vantajosa porque este pode especificar impostos ou taxas que permitam financiar a provisão do bem.
- Entretanto, é difícil determinar o nível ótimo do bem público na presença de caronas, e mesmo quais os bens públicos deverão ser ofertados.

Provisão de Bens Públicos

- **Sistema de Votação**

- Como vimos, para que haja eficiência de Pareto, não podem existir externalidades de consumo.
- Dito de outro modo, a utilidade de um consumidor não pode ser afetada pelo consumo de outro consumidor.
- Entretanto, como todos consomem a mesma quantidade do bem público, as utilidades dos consumidores são mutuamente dependentes. Podem, então, ocorrer externalidades de consumo e o mercado competitivo não necessariamente provê a quantidade eficiente do bem público.
- Descartando-se o mecanismo de comando, resta apelar para o sistema de votação para a escolha das quantidades do bem público.
- Infelizmente, o mecanismo de votação também não garante a escolha da quantidade eficiente, já que está sujeito ao paradoxo do voto (paradoxo de Condorcet).

Provisão de Bens Públicos

- **Sistema de Votação**

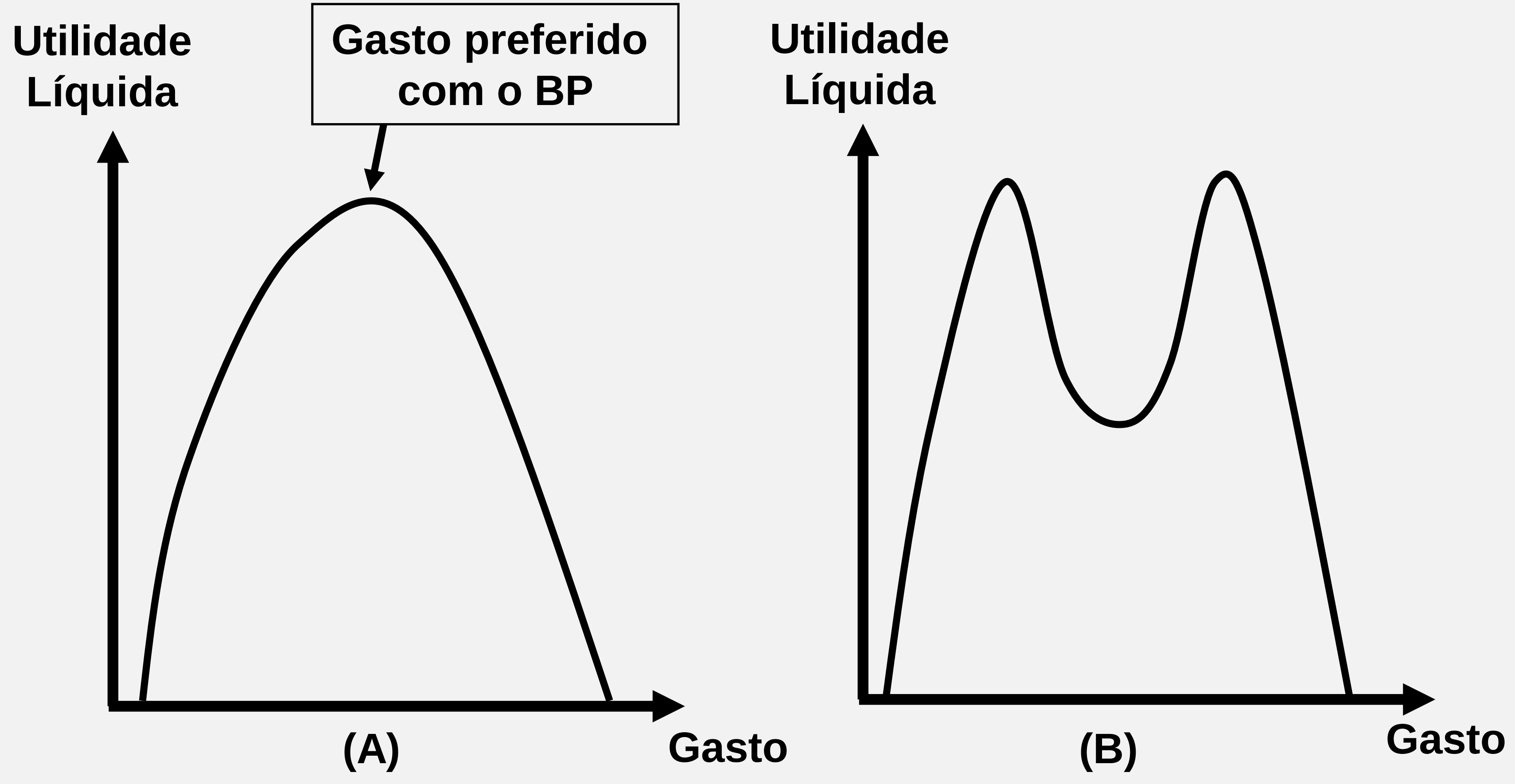
- Ao escolher entre três níveis de gasto com defesa pública, por exemplo, **A**, **B** e **C**, é possível que a maioria prefira **A** a **B**, **B** a **C** e **C** a **A**. Nesse caso, as preferências sociais não são transitivas.

- Porém, se o consumidor 1 levar em conta sua utilidade líquida do bem público (diferença entre o gasto com o bem público e a sua contribuição) e todos os outros consumidores também considerarem suas utilidades líquidas, basta que o formato das preferências seja como na **Figura a**: uma parábola de único pico. Isto significa que a utilidade líquida com o bem público inicialmente aumenta por causa do benefício gerado pelo bem público, atinge um ponto de máximo e depois cai devido aos custos de se prover o bem público.

- Com preferências individuais com esse formato, as preferências sociais não exibirão o paradoxo do voto. Porém, o paradoxo continua se as preferências forem como as desenhadas na **Figura b**.

Provisão de Bens Públicos

- **Sistema de votação**



Formatos de preferências individuais pelo bem público

Provisão de Bens Públicos

- **Sistema de Votação**
- Se todos possuem preferências como em (A), o mecanismo de votação nunca será intransitivo.
- Nesse caso, o nível de gasto com o bem público será determinado pelo gasto médio. Por quê?
  - Metade da população quer gastar mais com o bem público e metade quer gastar menos.
- **Gasto mediano será eficiente? Em geral, não:**
  - O resultado médio apenas significa que metade da população quer mais e metade quer menos, mas não nos diz nada sobre quanto a mais quer-se do bem público.
  - Como a eficiência leva isso em conta, a votação não conduzirá, em geral, a um resultado eficiente.

Provisão de Bens Públicos

- **Sistema de Votação**
- **Portanto, o problema se resume a:** sob a votação pela regra da maioria, o nível de gasto no bem público será aquele correspondente à preferência do eleitor mediano, que não é, necessariamente, o resultado eficiente.
- Além disso, mesmo que os consumidores tenham preferências de único pico, de modo que a votação possa levar a um resultado razoável, eles ainda possuem o incentivo de não votar em suas preferências verdadeiras para manipular o resultado em seu favor.

Provisão de Bens Públicos

- **Revelação da Demanda e o Imposto de Groves-Clarke**

- Os consumidores poderão revelar o valor verdadeiro que atribuem ao bem público através do mecanismo de mercado se as preferências forem quase lineares.

- Como vimos, com preferências quase lineares há um nível ótimo de bem público, e a questão é encontrá-lo.

- Vamos supor que o problema seja provê-lo ou não.

Provisão de Bens Públicos

- **Revelação da Demanda e o Imposto de Groves-Clarke**

- Suponha que o governo pense em prover um determinado bem público, cujo custo seja de $100.
- Cada consumidor atribui um valor diferente ao bem público, que representaremos por v_i .
- Como vimos, vale a pena ofertar o bem público se $\boxed{\sum_{i=1}^{n} v_i \geq \$100.}$

- Se pedirmos aos consumidores que informem o valor que atribuem ao bem público (v_i), vimos que eles possuem incentivos para mentir, já que podem pegar carona.
    - Se outros pagarem o suficiente, por que contribuir ?

Provisão de Bens Públicos

- **Revelação da Demanda e o Imposto de Groves-Clarke**

- Um mecanismo capaz de evitar este problema é determinar, através de um **"planejador central"** que, uma vez decidido ofertar o bem público, cada consumidor pagará uma quantia predeterminada c_i . Depois, cada consumidor poderá informar seu v_i .
  - Desta forma, poderemos conhecer o valor líquido: $n_i = v_i - c_i$.

- Depois disso podemos somar todos os valores líquidos (n_i) para ver se o total é positivo, o que justificaria a provisão do bem público.
- Entretanto, existe um problema a ser resolvido: cada consumidor pode declarar um valor não verdadeiro de v_i .
  - Os consumidores que quiserem a oferta do bem público podem aumentar muito seu valor verdadeiro de v_i , já que isto não afeta seu pagamento (c_i), fazendo com que a soma dos valores líquidos (n_i) seja elevada e, com isso, decida-se pela oferta do bem público.

Provisão de Bens Públicos

- **Revelação da Demanda e o Imposto de Groves-Clarke**

- Note que, nesse caso, as únicas pessoas que importam são aquelas que alteram a soma dos valores para mais ou para menos, relativamente ao custo do bem público. Esses são chamados **agentes pivô**. Pode ser que não haja agentes pivô, ou que todos sejam pivôs.
- Quando a decisão social é modificada, essa decisão impõe algum dano aos outros agentes.
  - Se os outros agentes desejam a provisão do bem público e o voto do agente pivô a inviabiliza, a situação desses agentes será piorada pela decisão do agente pivô.
  - Se os outros agentes não desejam a provisão do bem público e o voto do agente pivô a viabiliza, a situação desses agentes seria piorada pela decisão do agente pivô.
- Precisamos, então, de um mecanismo para que os pivôs declarem corretamente o valor atribuído ao bem público (v_i).

Provisão de Bens Públicos

- **Revelação da Demanda e o Imposto de Groves-Clarke**

- Supondo que o consumidor *j* seja o pivô, se a soma de todos os n_i , com $i \neq j$, for positiva (decisão de ofertar o bem público) e, por causa de n_j decida-se não ofertar o bem público, $\sum n_i + n_j < 0$, então o consumidor *j* causa o dano social de:

$$\boxed{H_j = \sum_{i \neq j} n_i > 0}$$

- Do mesmo modo, se, na média, todos os demais não desejassem a oferta do bem público, de modo que a soma de seus valores líquidos fosse negativa e o agente *j* a tornasse positiva, o dano que *j* imporia aos outros agentes seria dado por:

$$\boxed{H_j = -\sum_{i \neq j} n_i > 0}$$

Provisão de Bens Públicos

- **Revelação da Demanda e o Imposto de Groves-Clarke**

- Para fornecer ao consumidor *J* os incentivos corretos para que ele decida ou não ser pivô, imporemos esse custo social apenas a ele.
- Dessa forma, ele enfrentará o custo social verdadeiro de sua decisão, qual seja, o mal que impõe às demais pessoas.
- No caso dos bem públicos esse tipo de imposto é conhecido como Imposto de **Groves-Clarke (ou imposto de Clarke).**

Provisão de Bens Públicos

- **Revelação da Demanda e o Imposto de Groves-Clarke**

- **Descrevendo o Mecanismo de Groves-Clarke**

I. Designe um custo para cada agente, c_i , o qual a pessoa terá de pagar se for decidido que o bem público será ofertado;
II. Cada agente tem de declarar um valor líquido , s_i , que pode ser ou não o seu valor líquido verdadeiro (n_i);
III. Se a soma dos valores líquidos declarados for positiva, o bem público será provido; se for negativa, não;

Provisão de Bens Públicos

- **Revelação da Demanda e o Imposto de Groves-Clarke**

- **Descrevendo o Mecanismo de Groves-Clarke**

IV. Cada pessoa pivô terá de pagar um imposto. Se a pessoa *j* mudar a decisão de provisão para não provisão, terá de pagar um imposto de:

$$\boxed{H_j = \sum_{i \neq j} s_i}$$

V. Se a pessoa *j* mudar a decisão de não provisão para provisão, o imposto será de:

$$\boxed{H_j = -\sum_{i \neq j} s_i}$$

VI. O imposto não é pago aos outros agentes e sim ao governo; não importa para onde vá o dinheiro, contanto que não influencie a decisão de mais ninguém; na prática, esses recursos deveriam ser “destruídos”.

Provisão de Bens Públicos

- **Um Exemplo do Imposto de Groves-Clarke**

- Suponha três estudantes de uma república, A, B e C, que precisam decidir se compram uma TV para a sala, que custa $300. Cada um concorda em pagar antecipadamente $100, que seria usado no caso de se decidir comprar a TV (bem público). Os estudantes A e B estão propensos a pagar $50 cada um para ter a TV, enquanto o estudante C está propenso a pagar $250.

- Os dados estão na tabela a seguir.

Consumidor	Parcela de Custo c_i	Valor v_i	Valor Líquido n_i	Imposto de Clarke H_j
A	100	50	-50	0
B	100	50	-50	0
C	100	250	150	100

Provisão de Bens Públicos

- **Um Exemplo do Imposto de Groves-Clarke**

- A soma dos v_i é 350, acima do custo de 300. Logo, comprar a TV gera uma melhoria de Pareto.
- Entretanto, se votassem, ganharia a escolha de não comprá-la.
  - Os estudantes A e B votariam em não comprar (n_A e n_B são negativos).
- O imposto de Clarke possibilita que a escolha ótima de Pareto seja feita, que é comprar a TV. O imposto é cobrado do pivô.

Provisão de Bens Públicos

- **Um Exemplo do Imposto de Groves-Clarke**

- Considerando o estudante A, somando n_B e n_C , −50 + 150 = 100, logo, a soma dos valores que o excluem é igual a 100 e seu valor líquido é de -50. Logo, o consumidor A não é pivô.
- Como o consumidor A piora com a provisão líquida do bem público, ele poderia ser tentado a exagerar no seu lance para baixo.
- Para assegurar que o bem público não fosse fornecido, ele teria que reportar −100 ou abaixo. Com isso, $|n_A| \geq |n_B + n_C|$
- Mas, se ele fizer isso, torna-se pivô e o imposto de Clarke para ele seria dado pela quantia declarada pelos outros dois consumidores, sendo igual a -50 + 150 = 100.
- Portanto, ele economizaria 50 em valor líquido, mas isso lhe custaria 100 em impostos, o que o deixaria com uma perda líquida de 50. Assim, não vale a pena exagerar.

Provisão de Bens Públicos

- **Um Exemplo do Imposto de Groves-Clarke**

- Para o consumidor C, somando n_A e n_B , temos : −50 − 50 = −100.

- Como (n_C =150) > (n_A + n_B =100) , o consumidor C é pivô, pois n_i fica positivo por sua causa e a TV seria comprada.

- Nesse caso, ele deve pagar o imposto de Clarke de 100.

- Como n_C = 150, menos 100 de imposto ele fica com 50 e não vale a pena exagerar v_C .

- Com o imposto de Clarke, a TV seria comprada e ninguém teria incentivo para exagerar.

$$Formalizando\ o\ Argumento.\ Sejam:$$

$$\left.\begin{array}{l} v_i: disposição\ a\ pagar\ declarada\ pelo\ indivíduo\ i. \\ c_i: parcela\ de\ custo\ para\ cada\ indivíduo. \end{array}\right\} n_i = (v_i - c_i)$$

$$K: assume\ valor\ 1\ caso\ \sum_{i=1}^{n}(v_i - c_i) \geq 0\ e\ 0\ caso\ contrário.$$

Se todos indivíduos declararem sua disposição verdadeira a pagar, K determina a provisão ótima do bem público.

$$K_j: assume\ valor\ 1\ caso\ \sum_{i \neq j}^{n}(v_i - c_i) \geq 0\ e\ 0\ caso\ contrário.$$

Indica a decisão que seria tomada caso o impacto de bem estar sobre o indivíduo *j* não fosse considerado.

$$Imposto\ de\ GC\ para\ cada\ indiíduo\ j\ : H_j = (K_j - K)\sum_{i \neq j}(v_i - c_i)$$

Consumidor	Parcela de Custo c_i	Valor v_i	Valor Líquido n_i	Imposto de Clarke H_j
A	100	50	$\boxed{-50}$	0
B	100	50	$\boxed{-50}$	0
C	100	250	150	$\boxed{100}$

$$Indivíduo \ \ A: K=\sum_{i=1}^{n} n_i = 50>0 \rightarrow 1 \ \ e \ \ K_j=\sum_{i\neq j}^{n} n_i = 100>0 \rightarrow 1$$

$$H_j=\left(K_j-K\right)\sum_{i\neq j} n_i \rightarrow H_j=(1-1)\bullet 100 \rightarrow H_j=0$$

$$Indivíduo \ \ C: K=\sum_{i=1}^{n} n_i = 50>0 \rightarrow 1 \ \ e \ \ K_j=\sum_{i\neq j}^{n} n_i = (-100)<0 \rightarrow 0$$

$$H_j=\left(K_j-K\right)\sum_{i\neq j} n_i \rightarrow H_j=(0-1)\bullet(-100) \rightarrow H_j=100$$

Provisão de Bens Públicos

- **Um Exemplo do Imposto de Groves-Clarke**

- O imposto de Clarke somente funciona com preferências quase lineares, para as quais a riqueza de cada consumidor não influencia a demanda pelo bem público e há um único nível ótimo do bem público.
- O imposto de Clarke garante que o nível de gasto com o bem público seja ótimo, mas o consumo privado é reduzido quando do pagamento do imposto.
- O resultado é, então, Pareto-ineficiente, já que o consumo privado poderia ser maior caso não houvesse o imposto.
- O imposto de Clarke garante que, se todos puderem ter sua situação melhorada com o fornecimento do bem público, então este será fornecido.
  - Mas isto não significa que todos terão sua situação melhorada. Alguns perdem (estudantes A e B) para que o bem público seja fornecido.

Provisão de Bens Públicos

- **Um Exemplo do Imposto de Groves-Clarke**

- Com a taxa de Groves-Clarke, declarar a verdadeira disposição a pagar é a estratégia fracamente dominante para todos os indivíduos.
- A taxa é sempre não negativa e apenas os indivíduos para os quais $K \neq K_j$, ou seja, apenas aqueles indivíduos que, quando desconsiderados, alteram a escolha do planejador, pagam taxa positiva.
- Caso alguém tenha que pagar a taxa, esse valor deverá ser destruído, o que implica um custo de eficiência associado a esse mecanismo.
- É possível construir um mecanismo similar para o caso de um bem público provido em quantidades contínuas. Porém, esse mecanismo só funcionará caso as preferências individuais forem quase lineares.

ANPEC 2008 – Questão 12

- Com relação à teoria dos bens públicos, julgue as afirmações:

0) Se um bem público puder ser provido em quantidade continuamente variável, então, para que sua provisão seja eficiente, é necessário que a média dos benefícios marginais de todos os usuários se iguale ao custo marginal de produção do bem. **F**

$$\frac{\partial c(G)}{\partial G} = \frac{\frac{\partial u_1(x_1,G)}{\partial G}}{\frac{\partial u_1(x_1,G)}{\partial x_1}} + \frac{\frac{\partial u_2(x_2,G)}{\partial G}}{\frac{\partial u_2(x_2,G)}{\partial x_2}}$$

$$CMa(G) = |TMS_1| + |TMS_2|$$

- Como vimos, a provisão eficiente do bem público ocorre quando a **soma** dos benefícios marginais se iguala ao custo marginal de produção do bem.

1) A presença de “caronas” dificulta a oferta eficiente dos bens públicos pelos mercados. **V**

- A possibilidade de cada agente mentir sobre seu preço de reserva, faz com que não haja provisão do bem, mesmo que a condição necessária seja respeitada ($r_1 + r_2 \geq c$).

2) No que tange à provisão de um bem público, o imposto de Groves-Clarke garante que, para as partes envolvidas, a revelação do valor líquido verdadeiro do bem público seja uma estratégia fracamente dominante. **V**

- O imposto de Groves-Clarke garante que não haja incentivo para mentir, pois caso você se transforme em pivô, será tributado.
- Trata-se de uma estratégia fracamente dominante, porque a soma dos preços de reserva pode ser igual ao custo do bem público ($r_1 + r_2 \geq c$).

3) O imposto de Groves-Clarke só funciona para utilidades quase lineares. **V**

- Como vimos, o imposto de Groves-Clarke só funciona para utilidades quase lineares, portanto, caso $U_i = v(G) + x_i$, pois isso implica que haverá uma única quantidade ótima do bem público, restando apenas a decisão de qual será essa quantidade.

4) Se as preferências individuais tiverem pico único, então a preferência coletiva poderá apresentar a intransitividade característica do paradoxo do voto. **F**

- Se as preferências individuais tiverem pico único, como vimos, poderá ser comprovado que a preferência coletiva ou social será transitiva, ainda que não se possa afirmar que será uma solução eficiente de Pareto.

ANPEC 2009 – Questão 14

- Suponha que existem 2 agentes e que existe um bem público e um bem privado, ambos disponíveis em quantidades contínuas. A provisão do bem público é dada por $G = g_1 + g_2$, em que g_i é a contribuição do agente *i* (para *i = 1,2*) para a provisão do bem público. A utilidade do agente 1 é $U_1(G, x_1) = 3\sqrt{G} + x_1$ e a do agente 2 é $U_2(G, x_2) = 5\sqrt{G} + x_2$, em que x_i é o consumo do bem privado pelo agente *i* (em que *i = 1,2*). Determine o nível de g^* de provisão eficiente do bem público.

- Como vimos, a provisão eficiente exige que:

$$\boxed{CMa(G) = |TMS_1| + |TMS_2|}$$

$$\frac{\partial c(G)}{\partial G} = \frac{\dfrac{\partial u_1(x_1,G)}{\partial G}}{\dfrac{\partial u_1(x_1,G)}{\partial x_1}} + \frac{\dfrac{\partial u_2(x_2,G)}{\partial G}}{\dfrac{\partial u_2(x_2,G)}{\partial x_2}}$$

$$1 = \frac{\dfrac{3}{2\sqrt{G}}}{1} + \frac{\dfrac{5}{2\sqrt{G}}}{1} \rightarrow \frac{3}{2\sqrt{G}} + \frac{5}{2\sqrt{G}} = 1 \rightarrow 2\sqrt{G} = 8 \rightarrow \boxed{G^* = 16}$$

ANPEC 2010 – Questão 14

- Três estudantes de mestrado em economia (ditos a, b e c), que dividem um quarto em uma república perto da escola, precisam decidir se adquirem ou não uma TV, que custa $300, para que possam relaxar assistindo a um filme todo domingo à noite, único horário em que não estão estudando. Eles concordam antecipadamente que, se decidirem adquirir a TV, então cada um contribuir com $100. Os preços de reserva dos estudantes a, b e c são, respectivamente $U_a = 60$, $U_b = 60$ e $U_c = 240$. Como os preços de reserva são informação privada, eles concordam em usar o mecanismo de Groves-Clarke de revelação da demanda. Para tanto, denote por h_a , h_b e h_c os impostos de Groves-Clarke dos estudantes a , b e c , respectivamente. Calcule $h_a + h_b + h_c$.

- Portanto, temos:
  - 3 indivíduos;
  - $C(G) = 300$;
  - $c_i = 100$.
  - $v_1 = 60$.
  - $v_2 = 60$.
  - $v_1 = 240$.

Valores Líquidos: $n_i = v_i - c_i$

$$n_1 = 60 - 100 = -40$$
$$n_2 = 60 - 100 = -40$$
$$n_3 = 240 - 100 = 140$$

- A condição de eficiência para a provisão do bem público é dada por:

$$\sum_{i=1}^{3} v_i \geq c \rightarrow \sum_{i=1}^{3} n_i \geq 0 \rightarrow \left[\left(n_1 + n_2 + n_3 \right) = 60 \right] \geq 0$$

- Logo, o bem público deve ser ofertado.

Indivíduo	Parcela de Custo c_i	Valor v_i	Valor Líquido n_i	Soma n_i	Soma $n_i,\ i \neq j$	Indivíduo *i* é Pivô ?	Imposto de Clarke H_j
1	100	60	-40	60	100	não	0
2	100	60	-40	60	100	não	0
3	100	240	140	60	-80	sim	80

- Observe que o indivíduo 3 é o pivô; a sua decisão ocasiona uma perda de bem estar para os indivíduos 1 e 2 no valor de 80. Por isso, ele deve pagar sozinho um imposto de Clarke de 80.
- Como a questão pede a soma do imposto de Clarke para os três indivíduos, a resposta é 80.

$Sejam:$

$v_i : disposição\ a\ pagar\ declarada\ pelo\ indivíduo\ i.$

$c_i : parcela\ de\ custo\ para\ cada\ indivíduo.$

$$n_i = (v_i - c_i)$$

$$K : assume\ valor\ 1\ caso\ \sum_{i=1}^{n}(v_i - c_i) \geq 0\ e\ 0\ caso\ contrário.$$

Se todos indivíduos declararem sua disposição verdadeira a pagar, K determina a provisão ótima do bem público.

$$K_j : assume\ valor\ 1\ caso\ \sum_{i \neq j}^{n}(v_i - c_i) \geq 0\ e\ 0\ caso\ contrário.$$

Indica a decisão que seria tomada caso o impacto de bem estar sobre o indivíduo *j* não fosse considerado.

$$Imposto\ de\ GC\ para\ cada\ indiíduo\ j\ : H_j = (K_j - K)\sum_{i \neq j}(v_i - c_i)$$

Indivíduo	Parcela de Custo c_i	Valor v_i	Valor Líquido n_i	Soma n_i	Soma $n_i,\ i \neq j$	Indivíduo *i* é Pivô ?	Imposto de Clarke H_j
1	100	60	-40	60	100	não	0
2	100	60	-40	60	100	não	0
3	100	240	140	60	-80	sim	80

$$Indivíduo\ 1: K = \sum_{i=1}^{n} n_i = 60 > 0 \rightarrow 1 \quad e \quad K_j = \sum_{i \neq j}^{n} n_i = 100 > 0 \rightarrow 1$$

$$H_j = \left(K_j - K\right) \sum_{i \neq j} n_i \rightarrow H_j = (1-1) \bullet 100 \rightarrow H_j = 0$$

$$Indivíduo\ 3: K = \sum_{i=1}^{n} n_i = 60 > 0 \rightarrow 1 \quad e \quad K_j = \sum_{i \neq j}^{n} n_i = (-80) < 0 \rightarrow 0$$

$$H_j = \left(K_j - K\right) \sum_{i \neq j} n_i \rightarrow H_j = (0-1) \bullet (-80) \rightarrow H_j = 80$$

ANPEC 2010 – Questão 13

- Considere o problema de provisão eficiente de um bem público contínuo com dois consumidores. Seja $U_i(\gamma, x_i) = ln(\gamma) + (1/2)x_i$ a utilidade do consumidor *i* sobre o bem público e o bem privado, em que γ é a quantidade do bem público e x_i a quantidade do bem privado consumido pelo consumidor *i*, para *i* = 1, 2. A produção do bem público depende das contribuições g_1 e g_2 dos consumidores 1 e 2, respectivamente, e é dada pela função de produção $\gamma = ln(g_1 + g_2)$. Cada consumidor possui uma dotação inicial de 2 unidades de bem privado. Calcule a quantidade eficiente de bem público que deve ser produzida

- Para calcularmos a quantidade eficiente do bem público, devemos maximizar a função utilidade do “planejador central” (socialmente ótima), que consiste em maximizar a função utilidade do consumidor i com relação ao bem público e o bem privado. Portanto:

$$\underset{\gamma, x_i}{máx} \; ln(\gamma) + \left(\frac{1}{2}\right) x_i$$

- Sujeito a duas restrições:

1) Que a função utilidade do indivíduo 2 seja maior ou igual a $\bar{u}_2$:

$$u_2(\gamma, x_2) = ln(\gamma) + \left(\frac{1}{2}\right) x_2 \geq \bar{u}_2$$

2) Que o custo do consumo dos bens privados mais o custo do bem público seja igual às dotações:

$$x_1 + x_2 + \gamma = w_1 + w_2 = 4$$

- O lagrangeano é dado por:

$$L = ln(\gamma) + \left(\frac{1}{2}\right)x_i - \lambda\left[ln(\gamma) + \left(\frac{1}{2}\right)x_2 - \bar{u}_2\right] - \mu\left[x_1 + x_2 + \gamma - 4\right]$$

$$CPO$$

$$(I)\quad \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \rightarrow \frac{1}{2} - \mu = 0 \rightarrow \boxed{\mu = \frac{1}{2}}$$

$$(II)\quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \rightarrow -\lambda\frac{1}{2} - \mu = 0 \rightarrow -\lambda\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right) = 0 \rightarrow \boxed{\lambda = -1}$$

$$(III)\quad \frac{\partial L}{\partial \gamma} = 0 \rightarrow \frac{1}{\gamma} - \lambda\frac{1}{\gamma} - \mu = 0$$

- Substituindo as condições (I) e (II) em (III):

$$\boxed{\frac{1}{\gamma}-(-1)\frac{1}{\gamma}-\left(\frac{1}{2}\right)=0\rightarrow\frac{2}{\gamma}=\frac{1}{2}\rightarrow\boxed{\gamma^{*}=4}}$$

- Também poderíamos obter o mesmo resultado utilizando a condição de equilíbrio que derivamos anteriormente:

$$\boxed{CMa(\gamma)=|TMS_1|+|TMS_2|}$$

$$\frac{\partial c(\gamma)}{\partial\gamma}=\frac{\dfrac{\partial u_1(x_1,\gamma)}{\partial\gamma}}{\dfrac{\partial u_1(x_1,\gamma)}{\partial x_1}}+\frac{\dfrac{\partial u_2(x_2,\gamma)}{\partial\gamma}}{\dfrac{\partial u_2(x_2,\gamma)}{\partial x_2}}\longrightarrow\boxed{Se\ CMa(\gamma)=1\Rightarrow\gamma^{*}=4}$$