Microeconomia

Elasticidades:

Função Utilidade Cobb-Douglas

Prof.: Antonio Carlos Assumpção

Elasticidades: Cobb-Douglas

- Suponha que as preferências de um consumidor possam ser representadas por $U(x,y) = x^{\alpha} y^{\beta}$. Podemos encontras as demandas Marshalianas da seguinte forma:

$$lagrangeano \rightarrow \Im = x^{\alpha} y^{\beta} + \lambda \left(I - P_x x - P_y y \right)$$

$$Cond.\ de\ primeira\ ordem:$$

$$\frac{\partial \Im}{\partial x} = 0 \Rightarrow \alpha x^{\alpha - 1} y^{\beta} - \lambda P_x = 0$$

$$\frac{\partial \Im}{\partial y} = 0 \Rightarrow \beta x^{\alpha} y^{\beta - 1} - \lambda P_y = 0$$

$$\frac{\partial \Im}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow I - P_x x - P_y y = 0$$

$$Logo: \quad \frac{\alpha y}{\beta x} = \frac{P_x}{P_y} \Rightarrow P_y y = \frac{\beta}{\alpha} P_x x$$

Elasticidades: Cobb-Douglas

$$Logo: \quad \frac{\alpha y}{\beta x} = \frac{P_x}{P_y} \Rightarrow P_y y = \frac{\beta}{\alpha} P_x x$$

$$Substituindo \quad na \quad R.O.I.$$

$$I = P_x x + P_y y \Rightarrow P_x x + \frac{\beta}{\alpha} P_x x = I \Rightarrow P_x x \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} \right) = I \Rightarrow \frac{I}{P_x x} = 1 + \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\frac{I}{P_x x} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha} \Rightarrow P_x x = \frac{I}{\frac{\alpha + \beta}{\alpha}} \Rightarrow$$

$$\boxed{x^* = \frac{\alpha}{(\alpha + \beta)} \frac{I}{P_x}} \longrightarrow \boxed{\text{Demanda Marshaliana Pelo Bem X}}$$

Elasticidades: Cobb-Douglas

- **Elasticidade Preço da Demanda por X**

Demanda por x $\rightarrow$ $x^* = \dfrac{\alpha}{(\alpha+\beta)} \dfrac{I}{P_x} \Rightarrow x^* = \dfrac{\alpha}{(\alpha+\beta)} I P_x^{-1}$

$$E_{P_X}^{X} = \frac{\partial X}{\partial P_X} \bullet \frac{P_X}{X} \Rightarrow -\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right) I P_x^{-2} \bullet \left[\frac{P_x}{\left(\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\right) I P_x^{-1}}\right] \Rightarrow -P_x^{-1} P_x \Rightarrow$$

$E_{P_X}^{X} = -1$ $\rightarrow$ Logo, para uma função utilidade Cobb-Douglas, preço e quantidade variam na mesma proporção, ou seja, um aumento no preço do bem x de 1% reduz a quantidade demandada em 1%.

OBS. De forma equivalente, poderíamos calcular a elasticidade preço da demanda por y, que também é igual a um (em módulo).

Elasticidades: Cobb-Douglas

- **Elasticidade Renda da Demanda por X**

Demanda por x → $x^* = \frac{\alpha}{(\alpha+\beta)} \frac{I}{P_x}$

$$E_I^X = \frac{\partial X}{\partial I} \bullet \frac{I}{X} \Rightarrow \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\frac{1}{P_x} \bullet \frac{I}{\frac{\alpha}{(\alpha+\beta)}\frac{I}{P_x}} \Rightarrow \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\frac{I}{P_x} \bullet \frac{(\alpha+\beta)P_x}{\alpha I} \Rightarrow$$

$\boxed{E_I^X = 1}$ → Logo, para uma função utilidade Cobb-Douglas, renda e quantidade variam na mesma proporção, ou seja, um aumento na renda de 1% aumenta a demanda por x em 1%.

OBS. De forma equivalente, poderíamos calcular a elasticidade renda da demanda por y, que também é igual a um.

Elasticidades: Cobb-Douglas

- **Elasticidade Cruzada da Demanda por X**

Demanda por x $\rightarrow$ $x^* = \dfrac{\alpha}{(\alpha+\beta)} \dfrac{I}{P_x}$

$$E^X_{(x,y)} = \frac{\partial X}{\partial P_y} \bullet \frac{P_y}{X} \Rightarrow 0 \bullet \frac{P_y}{X} = 0$$

$\boxed{E^X_{(x,y)} = 0}$ $\rightarrow$ Logo, para uma função utilidade Cobb-Douglas, a variação no preço de y não afeta a quantidade demandada pelo bem x.

OBS. De forma equivalente, poderíamos calcular a elasticidade cruzada da demanda por y, que também é igual a zero.

Elasticidades: Cobb-Douglas

- Logo, para uma função utilidade Cobb-Douglas, as elasticidades preço e renda são unitárias e as elasticidades cruzadas iguais a zero.