Crescimento Econômico:
O Modelo de Solow

Prof.: Antonio Carlos Assumpção

Os Fatos do Crescimento

- Passamos agora da determinação do produto no curto e médio prazos – onde predominam as flutuações – para a determinação do produto no longo prazo – onde predomina o crescimento.
- ***Crescimento*** é o aumento constante do produto agregado ao longo do tempo, ou seja, **um aumento da capacidade de geração de oferta ao longo do tempo.**

Crescimento nos Países Ricos a Partir de 1950

PIB dos Estados Unidos a partir de 1890

O produto agregado dos EUA aumentou 43 vezes desde1890.

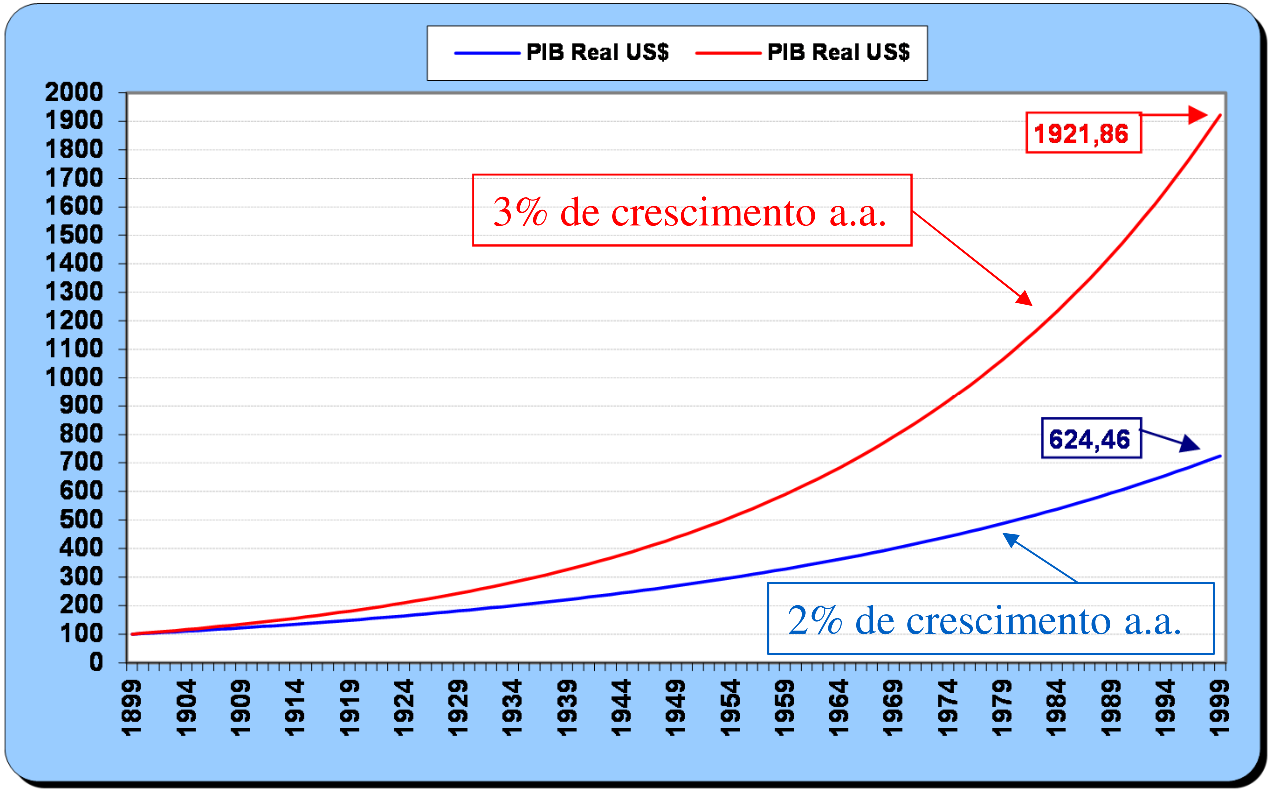
A *escala logarítmica* permite que o mesmo aumento proporcional em uma variável seja representado pela mesma distância no eixo vertical.

Veja a planilha “Taxas de crescimento comparadas”.

Prof.: Antonio Carlos Assumpção

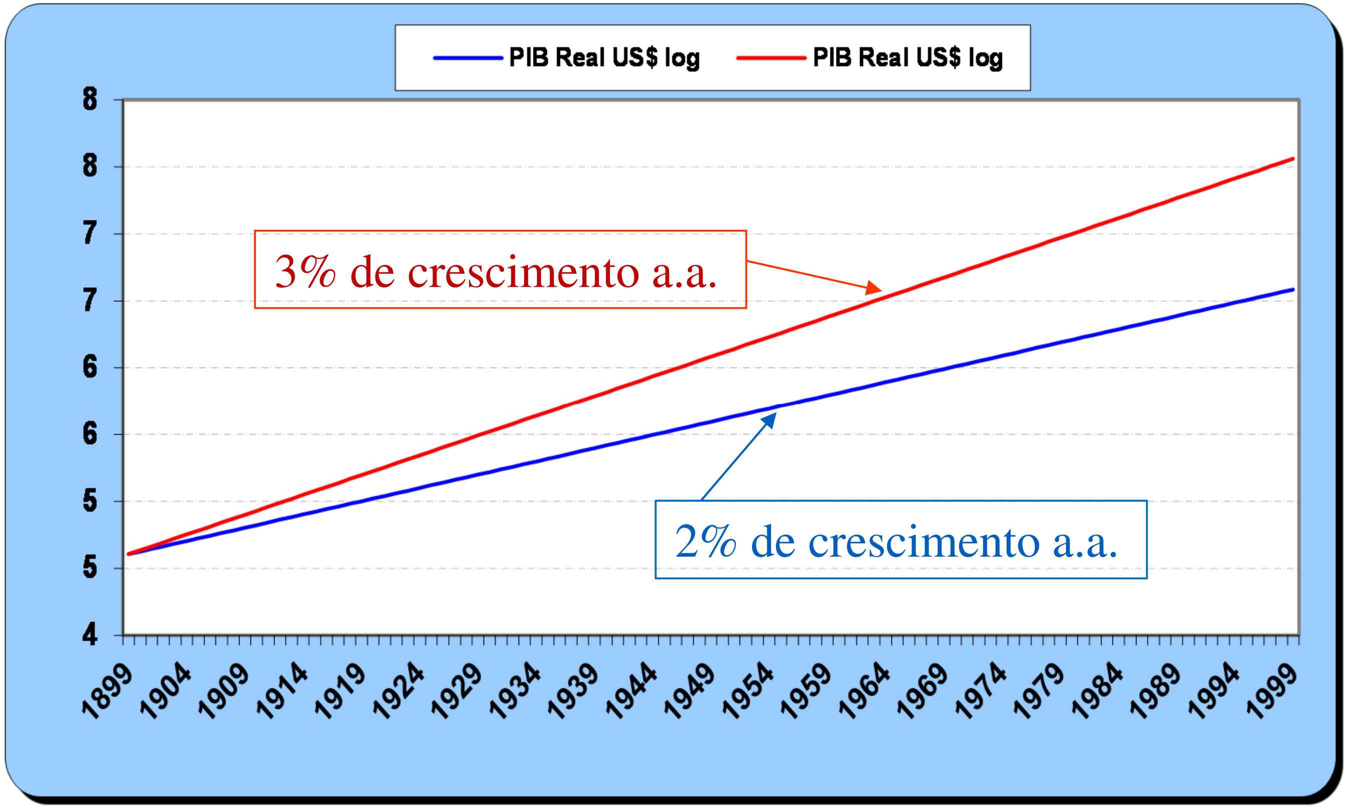
Escala Logarítmica

- Comportamento da variável y, crescendo à taxa r : $y_t = y_0 e^{rt}$.



A função vai ficando mais inclinada com a mesma taxa de crescimento. Portanto, a inclinação da função em um intervalo não permite que façamos qualquer inferência sobre a maior ou menor taxa de crescimento.

- Aplicando ln, temos: $\ln y_t = \ln y_0 + rt$.
  - Agora, a inclinação da função é dada por r, a taxa de crescimento. Portanto, quanto mais inclinada a função, maior será a taxa de crescimento.



Crescimento nos Países Ricos a Partir de 1950

- O ***produto per capita*** é igual ao PIB dividido pela população.
- O ***padrão de vida*** depende da evolução do produto *per capita*, não do total do produto.
- Para comparar o PIB entre países, usamos um conjunto comum de preços para todos os países. Os números ajustados para o PIB real são medidas do ***poder de compra*** entre países também chamados de ***paridade de poder de compra*** (***PPC***).

Crescimento nos Países Ricos a Partir de 1950

Evolução do produto *per capita* em cinco países ricos desde 1950

	Taxa anual de crescimento Produto per capita *(%)*		*Produto real* per capita *(dólares de 1996)*		
	1950-1973	1974-2000	1950	2000	2000/1950
França	4,1	1,6	5.489	21.282	3,9
Alemanha	4,8	1,7	4.642	21.910	4,7
Japão	7,8	2,4	1.940	22.039	11,4
Reino Unido	2,5	1,9	7.321	21.647	3,0
Estados Unidos	2,2	1,7	11.903	30.637	2,6
Média	4,3	1,8	6.259	23.503	3,7

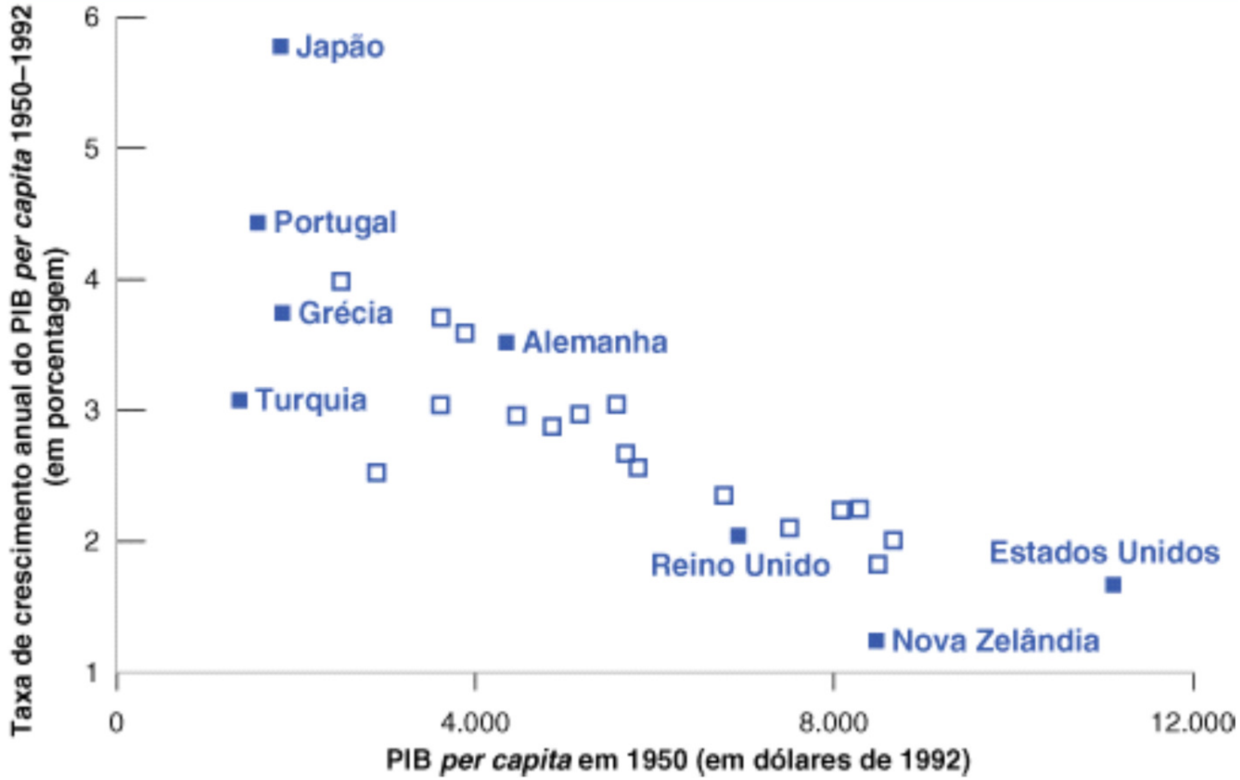
Crescimento nos Países Ricos a Partir de 1950

❖ **Dos dados na tabela anterior, concluimos que:**

- O padrão de vida aumentou significativamente desde 1950.
- A taxa de crescimento do produto *per capita* diminuiu a partir de meados da década de 1970.
- Houve uma ***convergência***, isto é, os níveis de produto *per capita* entre os cinco países tornaram-se mais próximos ao longo do tempo.
- A diferença entre o produto *per capita* nos Estados Unidos e nos outros países é menor agora do que na década de1950.

Crescimento nos Países Ricos a Partir de 1950

Taxa de crescimento do PIB per capita *desde 1950* versus *PIB* per capita *em 1950; países da OCDE*



Países com um nível mais baixo de produto *per capita* em 1950, em geral, cresceram mais rápido: convergência absoluta de renda per capita dos países da OCDE, no período 1950-1992

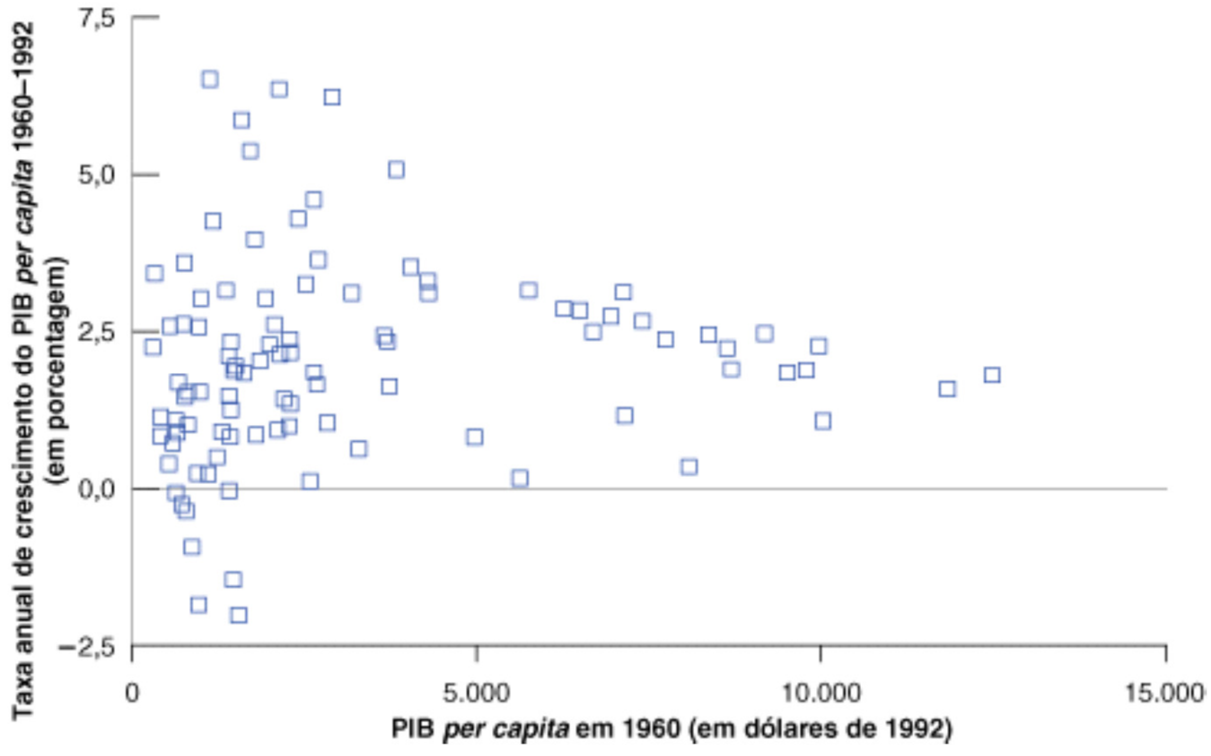
Uma Visão Mais Ampla Através do Tempo e do Espaço

- Do fim do Império Romano até cerca do ano 1500, não houve em essência nenhum crescimento do produto *per capita* na Europa. Esse período de estagnação é freqüentemente chamado de ***era malthusiana***.
  - Segundo Malthus, qualquer aumento do produto levava a uma queda da mortalidade, o que, por sua vez, resultava em um aumento da população até que o produto *per capita* retornasse a seu nível inicial.
- De cerca de 1500 a 1700, o crescimento do produto *per capita* tornou-se positivo, embora pequeno.

- Mesmo na Revolução Industrial as taxas de crescimento não eram altas pelos padrões atuais.
- Na cronologia da história humana, o crescimento do produto *per capita* constitui um fenômeno recente.
- Existe a possibilidade de que o produto *per capita* de um ou mais países ultrapasse o produto *per capita* dos Estados Unidos.

Exame dos Países

Taxa de crescimento do PIB* per capita, *1960-1992,* versus *o PIB* per capita *em 1960 (dólares de 1992); 101 países

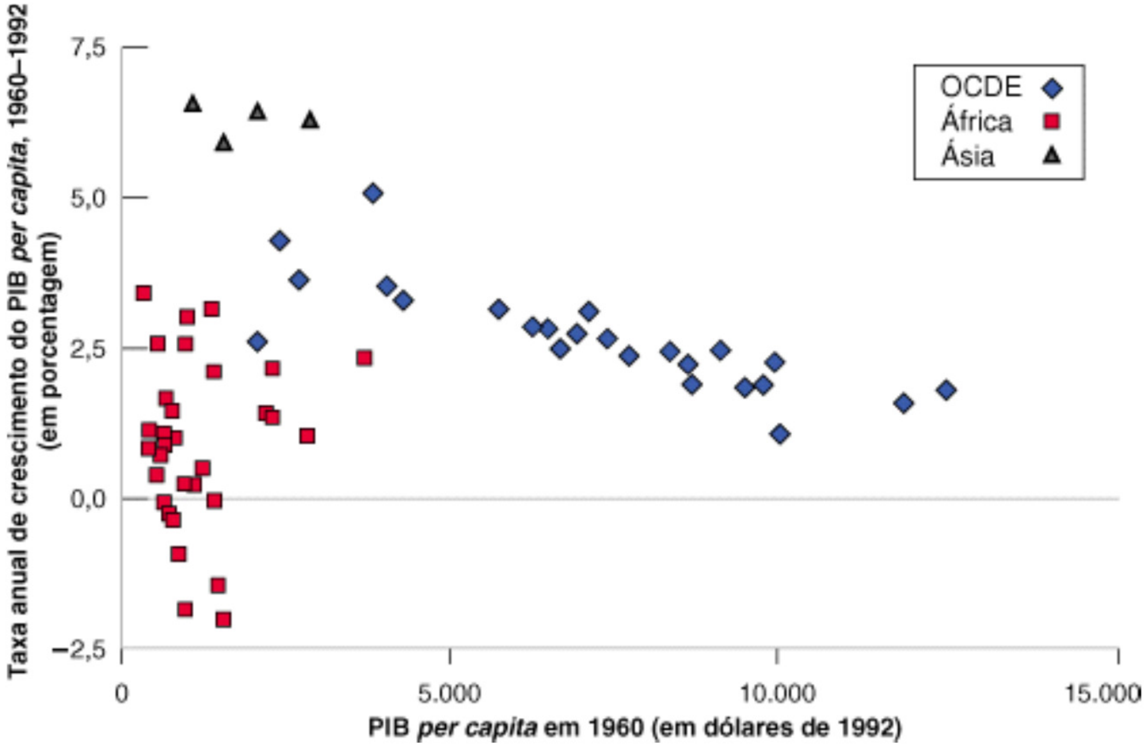


Não há relação clara entre a taxa de crescimento do produto desde 1960 e o nível do produto *per capita* em 1960.

Exame dos Países

Taxa de crescimento do PIB* per capita, *1960-1992,* versus *PIB* per capita *em 1960; OCDE, África e Ásia

Os países asiáticos estão convergindo para os níveis da OCDE. Não há evidência de convergência entre os países africanos.



Os quatro triângulos no canto superior esquerdo correspondem aos *quatro tigres*: Coréia do Sul, Hong Kong, Singapura e Taiwan. Os quatro tiveram taxas anuais de crescimento do PIB acima de 6% nos últimos 30 anos.

Análise do Crescimento: Uma Introdução

- Para pensar sobre os fatos apresentados nas seções anteriores, usamos a estrutura de análise desenvolvida por Robert Solow, do MIT, no final da década de 1950. Particularmente:
  - O que determina o crescimento?
  - Qual é o papel do acúmulo de capital?
  - Qual é o papel do progresso tecnológico?

O Modelo de Crescimento Neoclássico: Modelo de Solow

- **O modelo de crescimento de Solow explica como a poupança, o crescimento demográfico e o progresso tecnológico afetam o produto com o decorrer do tempo.**

- **Acumulação de Capital**
  - Examinaremos como a oferta e a demanda de bens e serviços determinam a acumulação no tempo.
- **Hipóteses Preliminares:**
  - força de trabalho constante $\Rightarrow \dfrac{\Delta N}{N} = n = 0 \rightarrow \dfrac{\dot{N}}{N} = n = 0$
  - tecnologia dada $\Rightarrow \dfrac{\Delta A}{A} = g_A = 0 \rightarrow \dfrac{\dot{A}}{A} = g_A = 0$

O Modelo de Crescimento Neoclássico: Modelo de Solow

- Observações:

$\frac{\dot{N}}{N} = n \Leftrightarrow N_{(t)} = N_0 e^{nt}$	Taxa de crescimento populacional igual a n. Inicialmente faremos a suposição de que n = 0
$\frac{\dot{A}}{A} = g_A \Leftrightarrow A_{(t)} = A_0 e^{g_A t}$	Taxa de variação tecnológica igual a g_A. Inicialmente faremos a suposição de que $g_A = 0$

O Modelo de Crescimento Neoclássico: Modelo de Solow

- **A Oferta de Bens e a Função de Produção**

  $$Y = Af\left(K,N\right)$$

- **Hipótese sobre a FDP:**
  - **homogênea linear** $\Rightarrow$ **retornos constantes de escala.**
  - **Logo:** $\left(\lambda K, \lambda N\right) = \lambda Y$ **; λ uma constante positiva.**

- **Desta forma, o produto por trabalhador depende apenas da quantidade de capital por trabalhador, ou seja:**

  $$\lambda = \frac{1}{N} \Rightarrow \frac{Y}{N} = Af\left(\frac{K}{N}, 1\right)$$ Simplificando a notação: $k = \dfrac{K}{N}$ e $y = \dfrac{Y}{N}$

O Modelo de Crescimento Neoclássico: Modelo de Solow

- Logo: $\boxed{y = Af(k)}$
  - Assim, o produto por trabalhador (produto *per capita*) é função do estoque de capital *per capita*.

- Propriedades:

$$a)\ \frac{\partial Y}{\partial N} > 0\ ; \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial N^2} < 0\ ; \quad \frac{\partial Y}{\partial K} > 0\ ; \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} < 0$$

$$b)\ \lim_{N\to\infty} f_N^{'} = 0; \quad \lim_{N\to 0} f_N^{'} = \infty; \quad \lim_{K\to\infty} f_K^{'} = 0; \quad \lim_{K\to\infty} f_K^{'} = 0$$

  - produtividades marginais positivas e decrescentes para ambos os fatores de produção.
  - Quando a quantidade do fator tende a zero sua PMg tende ao infinito e quando tende ao infinito sua PMg tende a zero.

O Modelo de Crescimento Neoclássico: Modelo de Solow

- Utilizando uma função Cobb-Douglas, que cumpre as propiedades anteriores, temos:

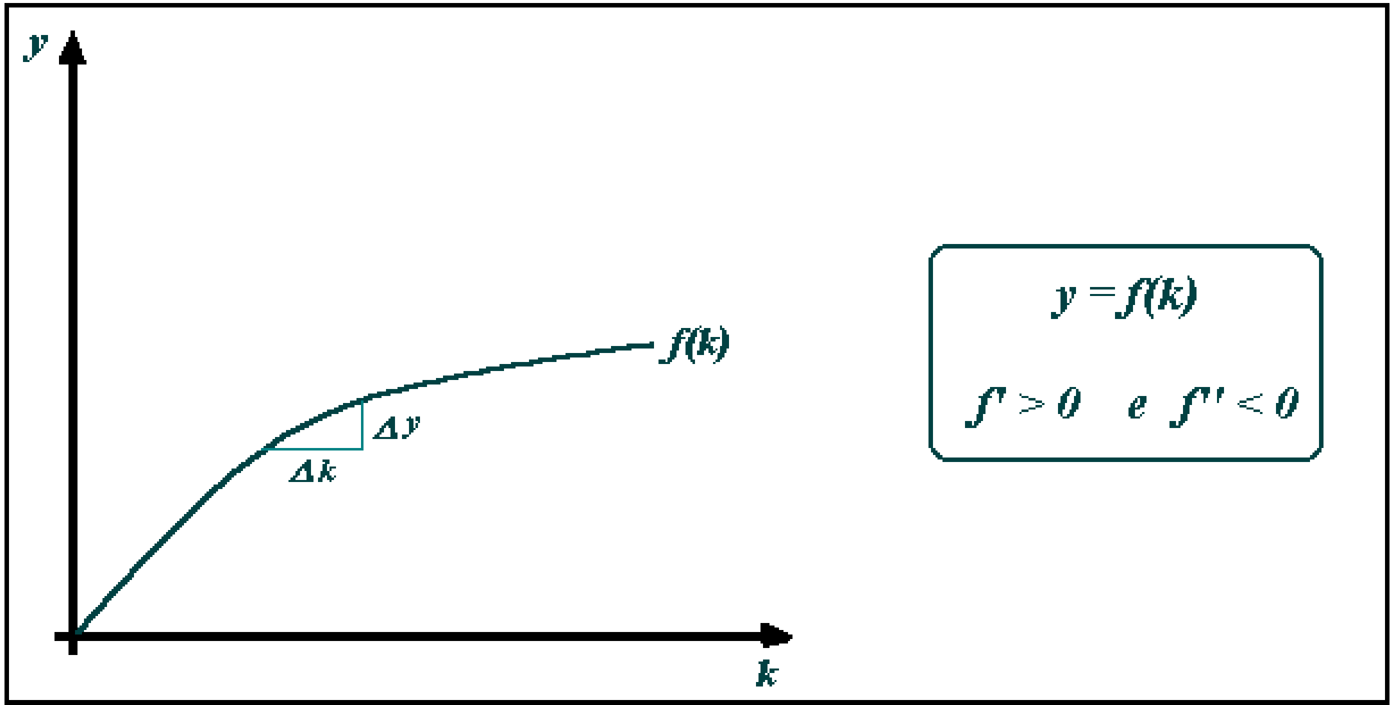
$$Y = AK^{\alpha}N^{1-\alpha}.\ \ Se\ \ \lambda = \frac{1}{N} \Rightarrow \frac{Y}{N} = A\left(\frac{K}{N}\right)^{\alpha}\left(\frac{N}{N}\right)^{1-\alpha} \Rightarrow y = Ak^{\alpha}.$$

- Note que α e 1-α são, respectivamente, as elasticidades do capital e trabalho.

$$E_K = \frac{\partial Y}{\partial K} \bullet \frac{K}{Y} = \frac{\alpha AK^{\alpha-1}N^{1-\alpha}K}{AK^{\alpha}N^{1-\alpha}} = \frac{\alpha AK^{\alpha}N^{1-\alpha}}{AK^{\alpha}N^{1-\alpha}} = \alpha$$

$$E_N = \frac{\partial Y}{\partial N} \bullet \frac{N}{Y} = \frac{(1-\alpha)AK^{\alpha}N^{1-\alpha-1}N}{AK^{\alpha}N^{1-\alpha}} = \frac{(1-\alpha)AK^{\alpha}N^{1-\alpha}}{AK^{\alpha}N^{1-\alpha}} = (1-\alpha)$$

O Modelo de Crescimento Neoclássico: Modelo de Solow



A inclinação da função de produção nos mostra o produto adicional por trabalhador, dado por uma unidade adicional de capital por trabalhador, ou seja: PMgk = f(k+1)-f(k)

O Modelo de Crescimento Neoclássico: Modelo de Solow

- **A Demanda e a Função Consumo**
  - Sendo $Y = C + I$, na forma "por trabalhador", temos: $y = c + i$

  - Logo, o produto por trabalhador divide-se em consumo por trabalhador e investimento por trabalhador. Sendo o consumo uma função da renda, temos:

    $c = (1 - s)y$, onde: $s = PMg_S \Rightarrow (1 - s) = PMg_C$

    Assim, $y = (1 - s)y + i$

    Rearrumando os termos, temos: $i = y - y + sy \quad \Rightarrow \boxed{i = sy}$

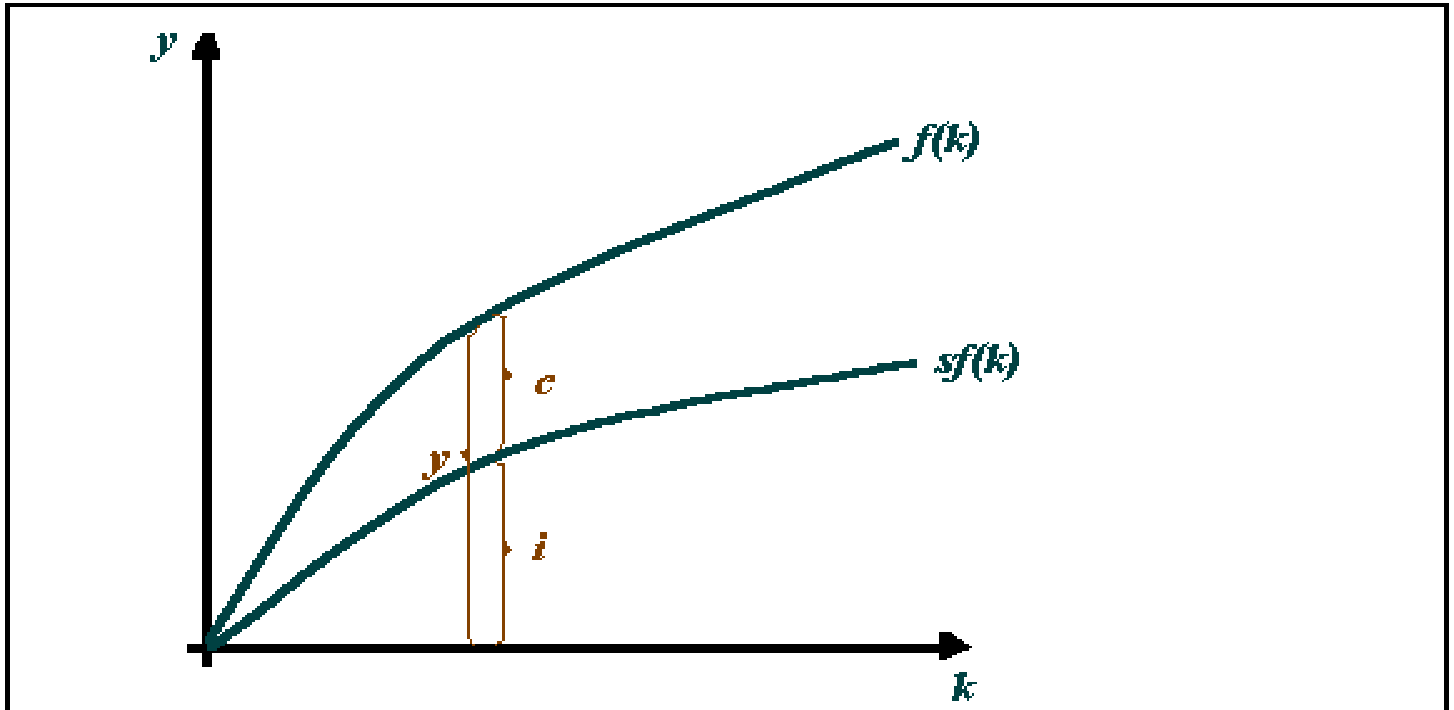
- Logo, o investimento também é proporcional à renda. Note que, implicitamente, ele também depende da taxa de juros, pois quando a Pmgs aumenta, a taxa de juros cai, e por isso o investimento aumenta.

O Modelo de Crescimento Neoclássico: Modelo de Solow

Determinantes do Investimento

- Vimos que: $i = sy$
- Como $y = Af(k)$, temos: $i = sAf(k)$
- Logo, quanto maior o estoque de capital *per capita*, maiores serão os níveis de investimento e produto *per capita.*

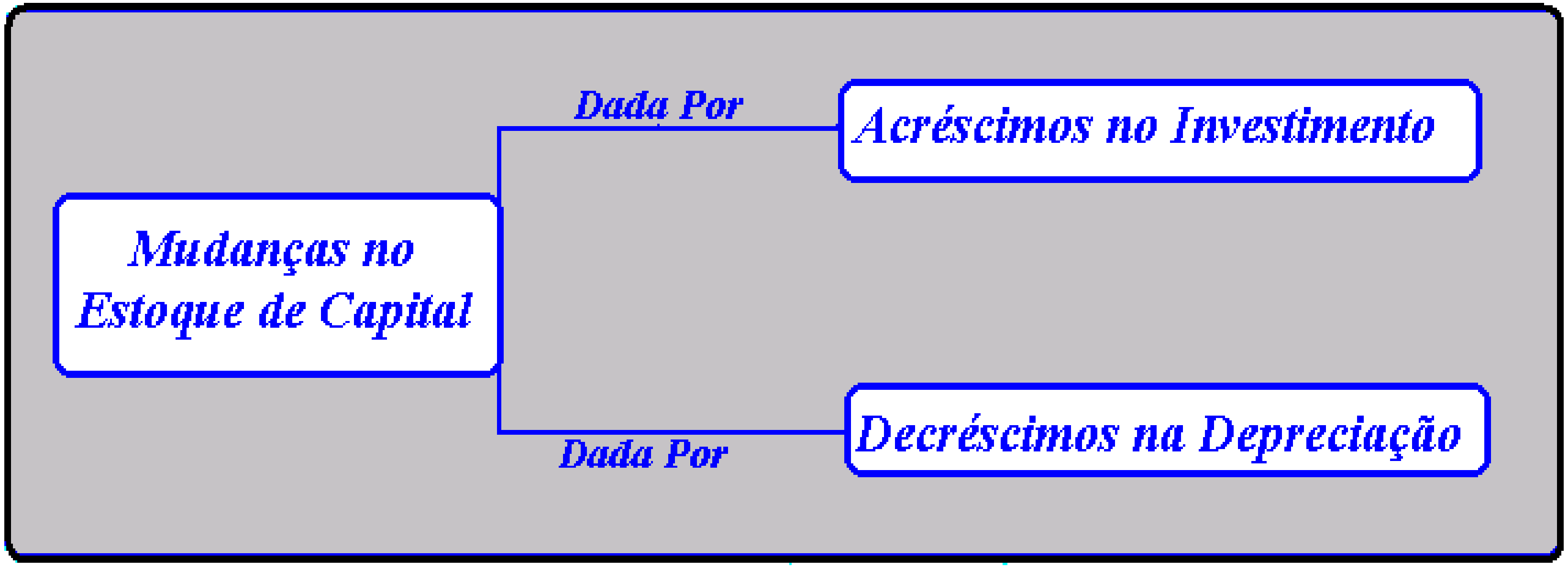
O Modelo de Crescimento Neoclássico: Modelo de Solow



Note que, como $y = f(k)$, $i = sf(k)$ e $y = c + i$, temos que: $c = f(k) - sf(k)$. Note ainda, que a poupança determina a divisão do produto entre consumo e investimento para cada valor de k.

O Estado Estacionário

- **Nível de Capital em Estado Estacionário (steady-state)**
  - **Agora vamos analisar se aumentos no estoque de capital induzem ao crescimento econômico.**



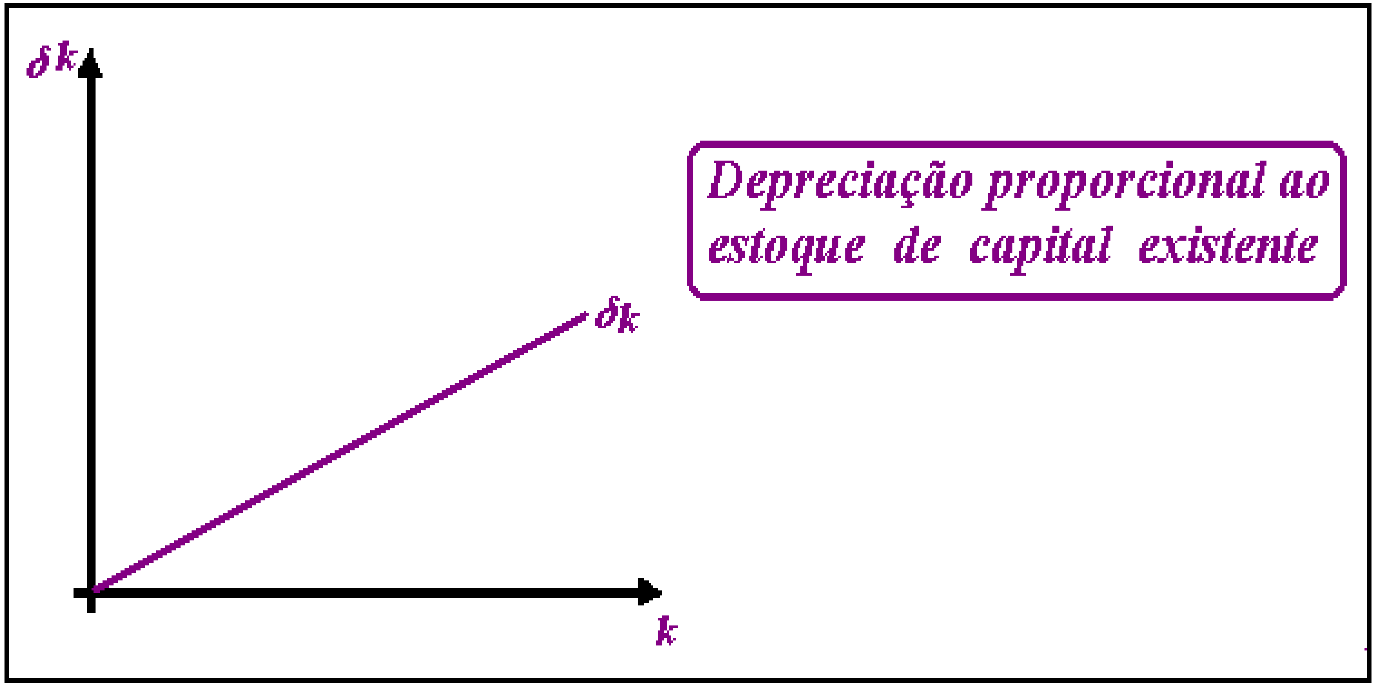
O Estado Estacionário

- Seja δ a taxa de depreciação do estoque de capital. Logo, a dinâmica de k pode ser descrita por:

$$\Delta k = i - \delta k \quad \text{ou} \quad \Delta k = sAf\left(k\right) - \delta k \quad \text{ou} \quad \boxed{\dot{k} = sAf\left(k\right) - \delta k}$$

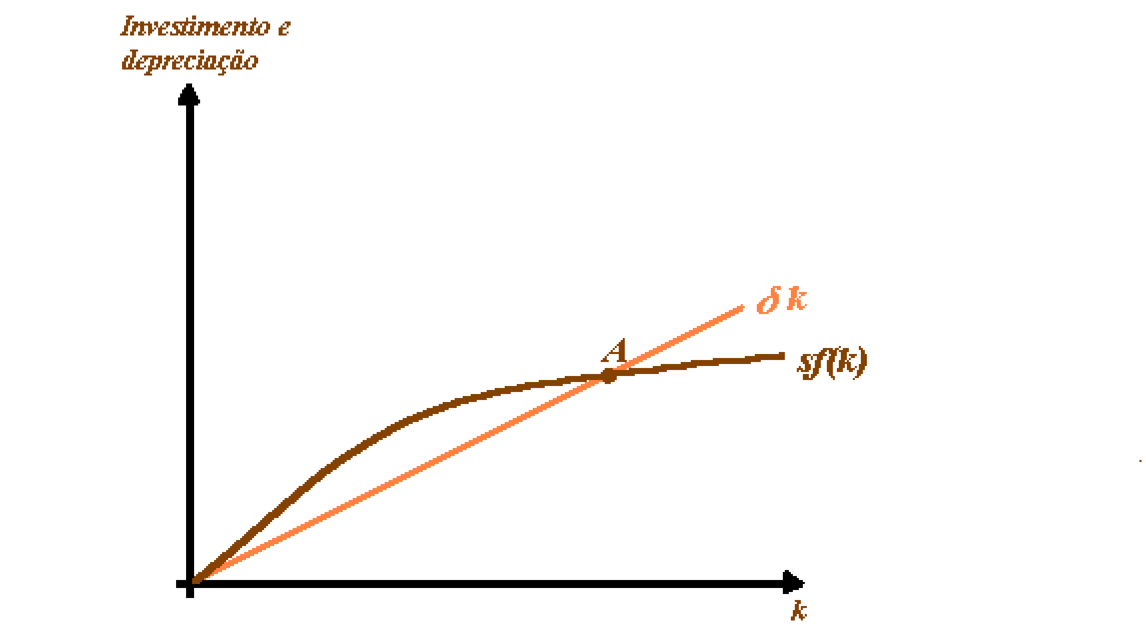
- Logo, a variação do estoque de capital é dada pelo investimento, descontada a depreciação, que é maior quanto maior o estoque de capital

- A depreciação graficamente.



O Estado Estacionário

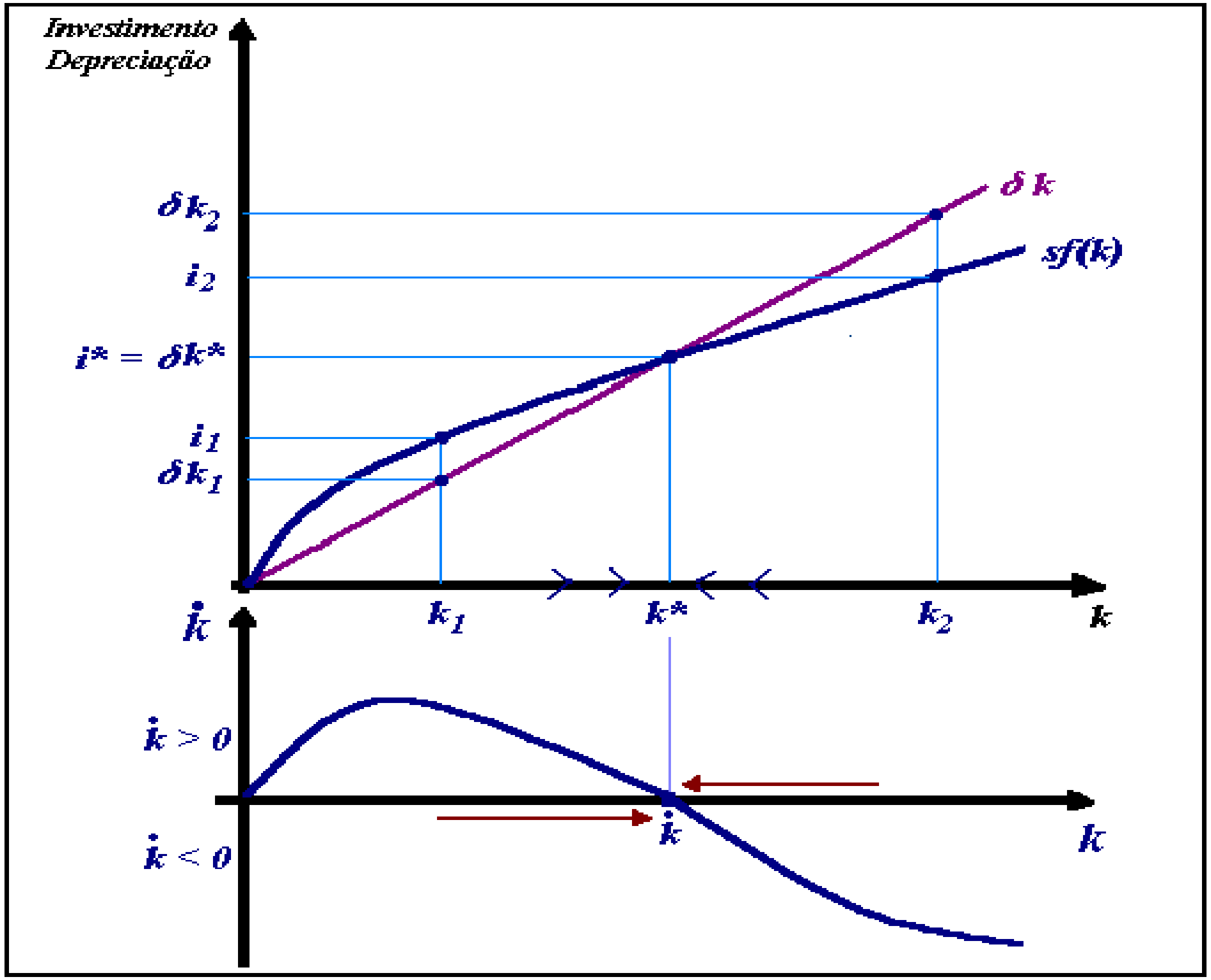
- Desta forma, podemos extrair uma relação gráfica entre o investimento e a depreciação, como mostra a figura abaixo.



Há um único nível de k, para qual o investimento é igual a depreciação ($\Delta k = 0$). Chamamos este ponto (A), de estado estacionário (steady-state) do capital (k^*).

O Estado Estacionário

- O motivo da convergência para o estado estacionário



O Estado Estacionário

- Sendo s constante, $i = sf(k)$. A depreciação é dada por δk, com δ constante. Note então que, com k_1, $i > \delta k$, logo, o estoque de capital cresce. Com k_2, $i < \delta k$, logo, o estoque de capital decresce, mostrando que existe uma tendência para que a economia caminhe para o estado estacionário. Isto pode, também, ser observado na parte inferior da figura, um diagrama de fase, que mostra o comportamento dinâmico de k.
- Dito de outro modo, com o investimento maior que a depreciação o estoque de capital *per capita* aumenta. Entretanto, como a PMgk é decrescente e a depreciação cresce a uma taxa constante, os acréscimos no estoque de capital per capita serão cada vez menores, com a economia convergindo para um estado estacionário, onde $\Delta k = 0$.

Um Exemplo

- **Exemplo Numérico da Tendência Para o Estado Estacionário**
- Suponha que a função de produção seja dada por: $Y = AK^{1/2}N^{1/2}$
- Logo, a função de produção por trabalhador é: $y = \frac{Y}{N}$
- Rearrumando os termos, temos $y = A\frac{K^{1/2}N^{1/2}}{N} \Rightarrow y = A\left(\frac{K}{N}\right)^{1/2}$
- Como $k = \frac{K}{N} \Rightarrow y = Ak^{1/2}$
- Supondo $A=1,\ s=0,3\ ,\ \delta=0,1\ e\ k_0=4,$ temos:

Um Exemplo

ANO	*k*	*y*	*c*	*i*	δk	Δk
1	4,000	2,000	1,400	0,600	0,400	0,200
2	4,200	2,049	1,435	0,615	0,420	0,195
3	4,395	2,096	1,467	0,629	0,440	0,189
.	....	....	....	....	....	....
.	....	....	....	....	....	....
25	7,321	2,706	1,894	0,812	0,732	0,080
.	....	....	....	....	....	....
.	....	....	....	....	....	....
100	8,962	2,994	2,096	0,898	0,896	0,002
.	....	....	....	....	....	....
.	....	....	....	....	....	....
∞	9,000	3,000	2,100	0,900	0,900	0,000

Um Exemplo

- Note que, como $\Delta k = sf(k) - \delta k$ (equação que nos mostra o comportamento de k no tempo), podemos determinar o estoque de capital no estado estacionário de maneira menos trabalhosa, a medida em que, no estado estacionário, $\Delta k=0$ Assim, temos:

$$0 = sf(k^*) - \delta k^* \Rightarrow \frac{k^*}{f(k^*)} = \frac{s}{\delta}$$

- Como, no nosso exemplo, $f(k) = k^{0,5} \Rightarrow \frac{k^*}{k^{*0,5}} = \frac{0.3}{0.1}$

- Elevando o primeiro membro ao quadrado, encontramos a solução, ou seja, o nível de capital no estado estacionário, $k^*=9$, o que confirma os cálculos efetuados no quadro do slide anterior.

Um Exemplo

- **Regra geral:** Calculando o estoque de capital no estado estacionário utilizando uma função Cobb-Douglas.

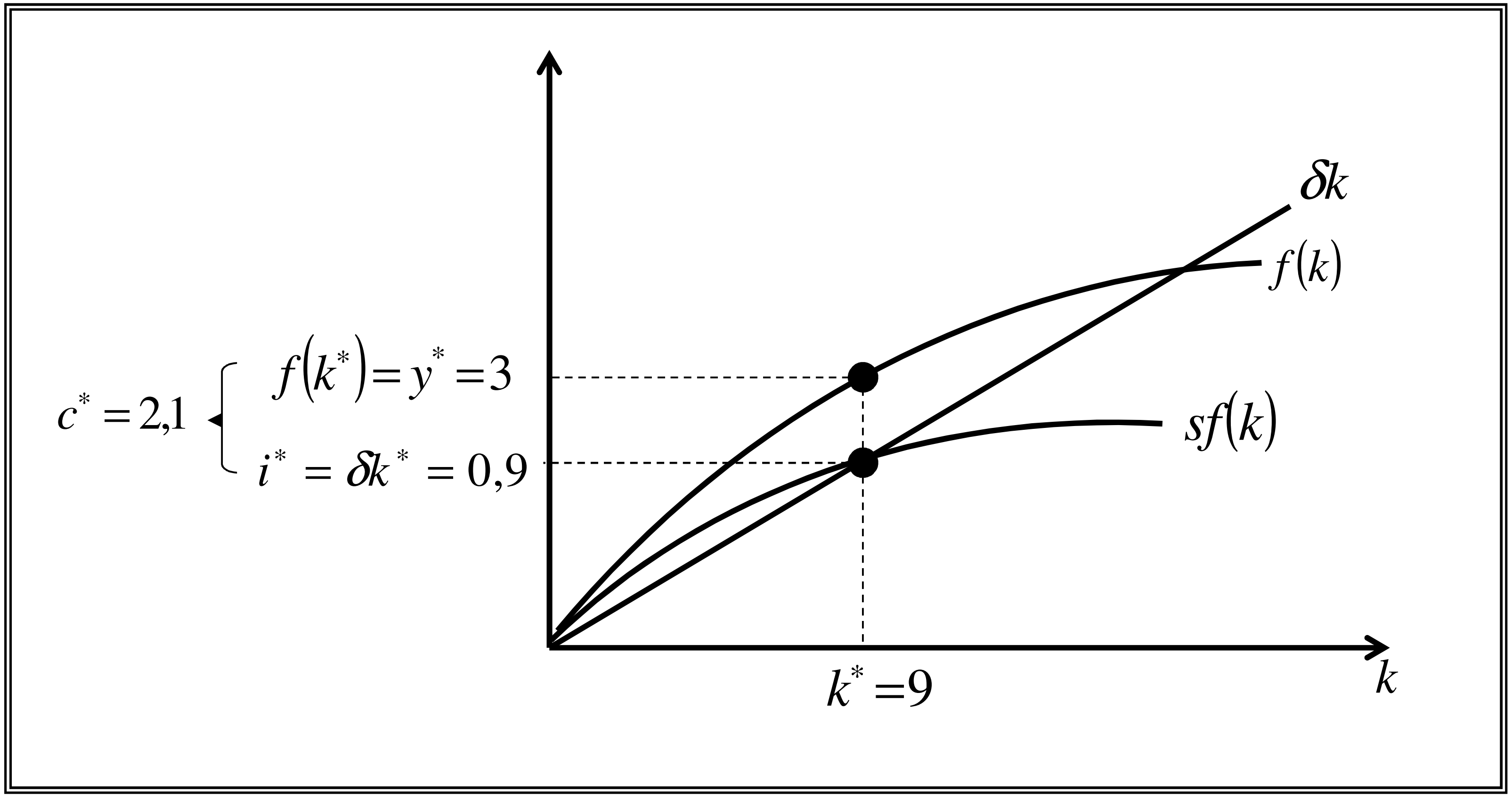
$$k^* \Rightarrow \dot{k} = 0 \Rightarrow sf\left(k^*\right) = \delta k^* \Rightarrow \frac{k^*}{f\left(k^*\right)} = \frac{s}{\delta}$$

$$Se \quad y = Ak^{\alpha}, \quad temos:$$

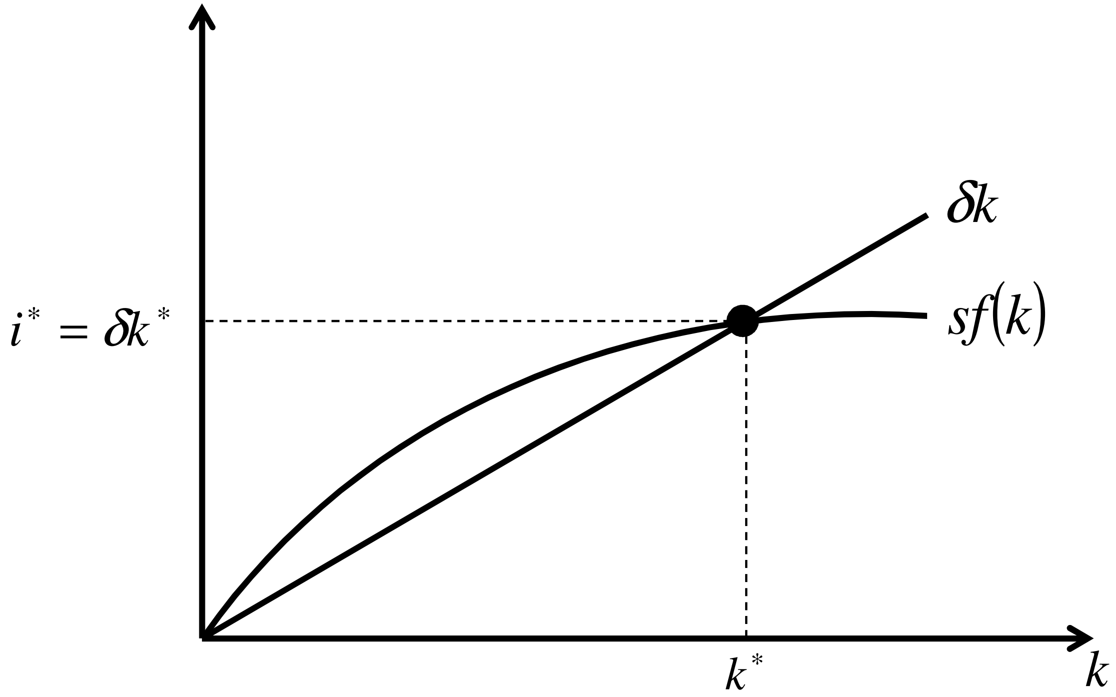
$$\dot{k} = sAk^{\alpha} - \delta k \Rightarrow sAk^{\alpha} = \delta k \Rightarrow \frac{k}{k^{\alpha}} = \frac{sA}{\delta} \Rightarrow k^{1-\alpha} = \frac{sA}{\delta} \Rightarrow \boxed{k^* = \left(\frac{sA}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}$$

$$Utilizando \ o \ exemplo \ anterior: k^* = \left(\frac{0{,}3 * 1}{0{,}1}\right)^{\frac{1}{1-0{,}5}} \Rightarrow k^* = 9$$

Um Exemplo



Um Exemplo

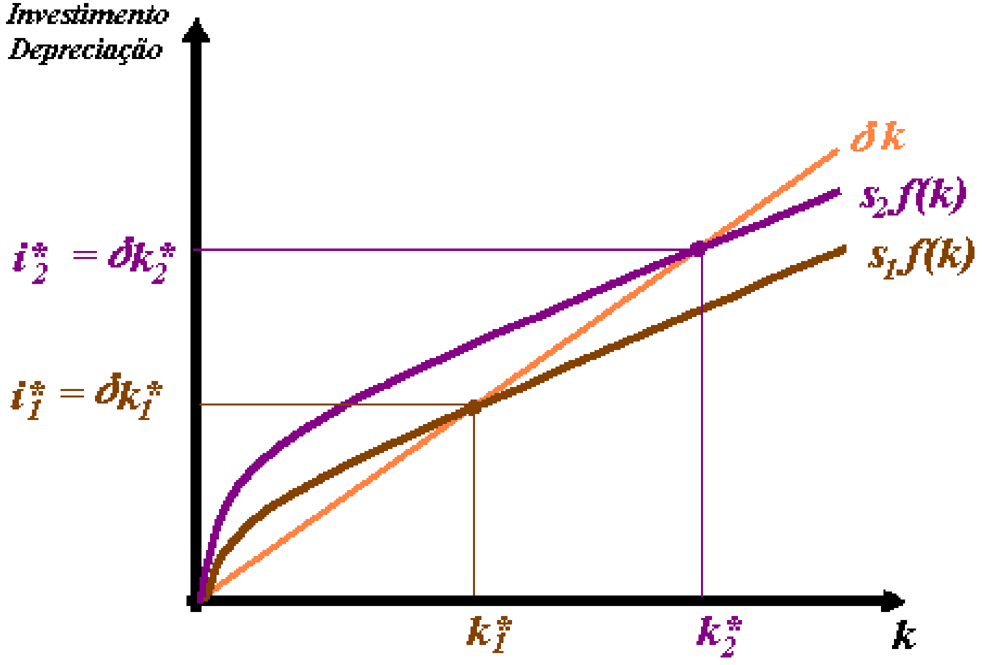


$$\boxed{\left(\frac{sA}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}} \Rightarrow k^* = \left(\overset{(+)}{s}, \overset{(+)}{A}, \overset{(-)}{\delta}, \overset{(+)}{\alpha}\right)$$

Logo, o estoque de capital per capita (assim como o produto per capita), será maior quanto maiores s, A e α e menor quanto maior δ.

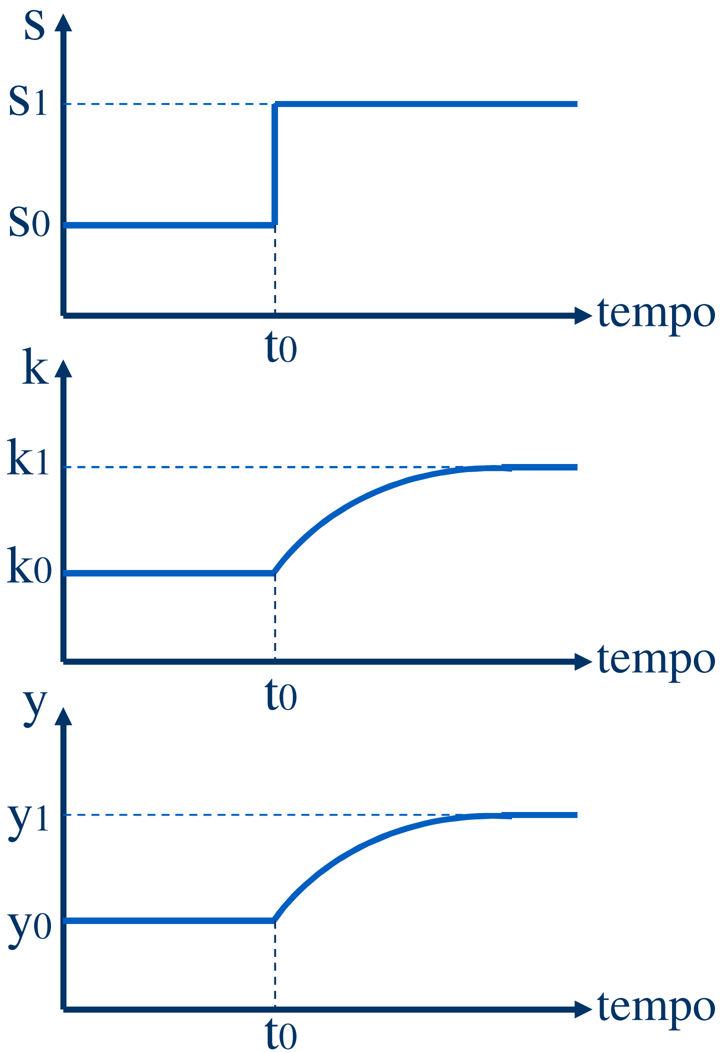
Alterações na Taxa de Poupança

- **Alterações na Taxa de Poupança**



Como $i = sf(k)$, se a poupança aumenta de s_1 para s_2, a curva se desloca para cima e o investimento aumenta, com o estoque de capital e a depreciação inalterados. Assim, como o investimento supera a depreciação, o estoque de capital cresce até o novo estado estacionário, com k_2^*.

Trajetórias das Variáveis Após um Aumento da Taxa de Poupança

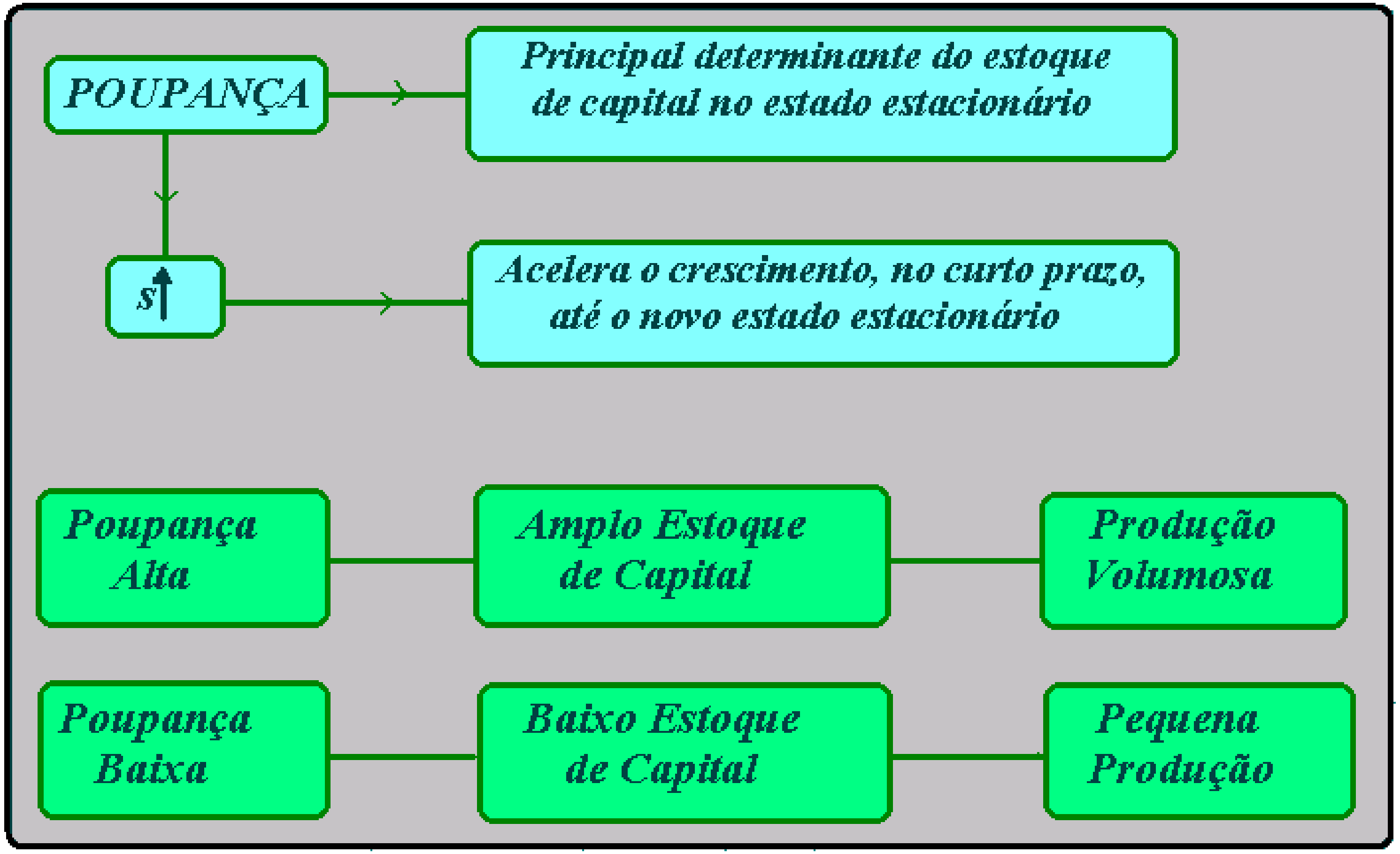


- Após o aumento da taxa de poupança de s_0 para s_1 o investimento supera a depreciação do estoque de capital. Com isso, o estoque de capital *per capita* passa a apresentar uma taxa de crescimento positiva, assim como a renda *per capita*.

- Como a PMgk é decrescente e a taxa de depreciação é constante, os acréscimos no estoque de capital *per capita* e no produto *per capita* são cada vez menores, com a economia convergindo para um novo estado estacionário, com k_1 e y_1.

Alterações na Taxa de Poupança

- Conclusões



Alterações na Taxa de Poupança

- A conclusão importante sobre a poupança no modelo de Solow é que, apesar de indispensável para o **nível do PIB *per capita***, **ela não garante o crescimento continuado**, a não ser no caso em que ela é sempre crescente, o que, obviamente, não é possível. Vale também salientar que, dado um alto nível de poupança, que permita um grande estoque de capital, a economia em questão fica obrigada a uma alta taxa de investimento para que este estoque de capital não diminua ao longo do tempo.

Taxas de Crescimento no Estado Estacionário

- Podemos calcular as taxas de crescimento das variáveis no estado estacionário aplicando ln e diferenciando.
- Observe que todas as variáveis com as quais trabalhamos variam ao longo do tempo (são função do tempo). Em geral, ocultamos esse fato nas equações somente para simplificar a notação.
- Seja uma função qualquer, definida por $y_{(t)} = \ln x_{(t)}$. Note que y depende de x e x depende de t (função composta) . Diferenciando (utilizando a regra de cadeia), temos :

$$\boxed{y_{(t)} = \ln x_{(t)} \Rightarrow \frac{dy}{\mathrm{dt}} = \frac{dy}{dx} \bullet \frac{dx}{dt} = \frac{1}{x} \bullet \dot{x} = \frac{\dot{x}}{x}}$$

- Logo, a derivada com relação ao tempo do logaritmo natural de uma variável é a taxa de crescimento dessa variável.

$$\boxed{\frac{d \ln K}{\mathrm{dt}} = \frac{\dot{K}}{K}}$$

Taxas de Crescimento no Estado Estacionário

- Taxas de Crescimento no estado estacionário

$$No \quad estado \quad estacionário \quad \dot{k}=0 \Rightarrow \frac{\dot{k}}{k}=0. \quad Logo, \quad \dot{y}=0 \Rightarrow \frac{\dot{y}}{y}=0$$

$$k=\frac{K}{N} \Rightarrow \ln k = \ln K - \ln N. \quad Diferenciando, \quad temos: \quad \overbrace{\frac{\dot{k}}{k}}^{0} = \frac{\dot{K}}{K} - \overbrace{\frac{\dot{N}}{N}}^{0} \Rightarrow \frac{\dot{K}}{K}=0$$

$$y=\frac{Y}{N} \Rightarrow \ln y = \ln Y - \ln N. \quad Diferenciando, \quad temos: \quad \overbrace{\frac{\dot{y}}{y}}^{0} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \overbrace{\frac{\dot{N}}{N}}^{0} \Rightarrow \frac{\dot{Y}}{Y}=0$$

- Logo, no estado estacionário, o estoque de capital per capita, o produto per capita, o estoque de capital total e o produto total crescem à taxa zero.

A Regra de Ouro (Golden Rule)

- **Hipótese:** O formulador de política econômica pode escolher a taxa de poupança e, portanto, o estado estacionário. Dito de outra forma, **a poupança é uma variável exógena.**

- **Qual o Estado Estacionário a Ser Escolhido**
  - Obviamente que os indivíduos não estão preocupados com o nível de produto por trabalhador, capital por trabalhador ou depreciação, eles estão preocupados tão somente com a quantidade de bens e serviços que podem adquirir. Se o objetivo do formulador de política econômica for maximizar o bem estar da população, deve ser escolhido um equilíbrio de longo prazo que contemple o máximo de consumo possível. Esse equilíbrio é chamado de nível ótimo de acumulação definido pela regra de de ouro (k**).

A Regra de Ouro (Golden Rule)

- **Encontrando o Nível Ótimo Definido Pela Regra de Ouro**
  - Temos que $y = c + i \Rightarrow c = y - i$
  - Como $y = f(k)$ e, em qualquer estado estacionário, $i = \delta k$, temos:

    $$c^* = f(k^*) - \delta k^*$$

- Logo, no estado estacionário, o consumo por trabalhador é igual ao produto por trabalhador menos a depreciação. Note que podemos escrever desta forma, pois no estado estacionário o investimento é igual a depreciação.

A Regra de Ouro (Golden Rule)

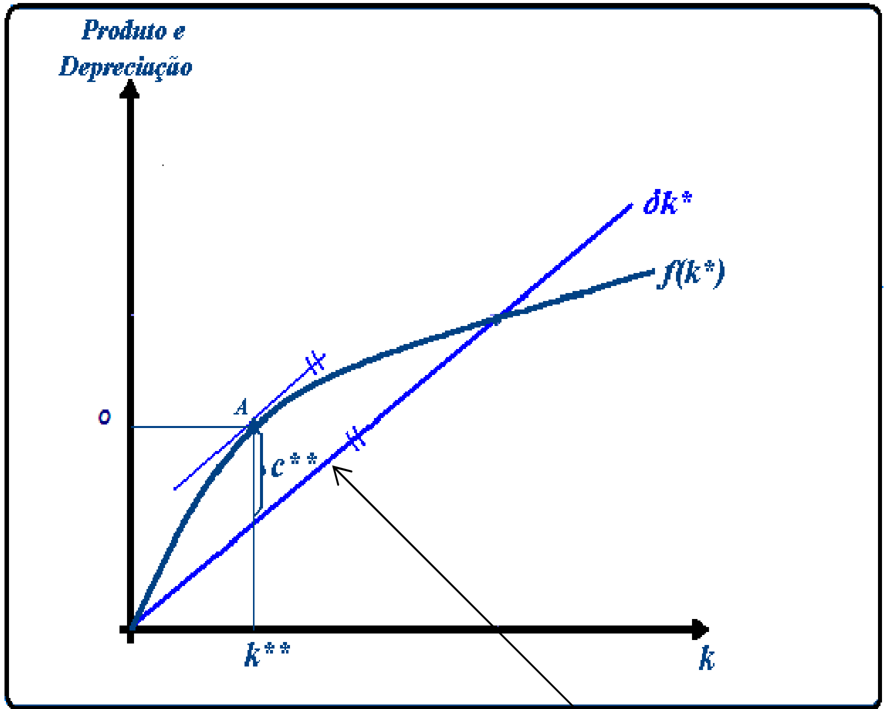
- Com o consumo escrito em função do estoque de capital, podemos maximizar c* relativamente a k*. Dito de outro modo, podemos escolher o estoque de capital per capita (estado estacionário) maximizador do consumo

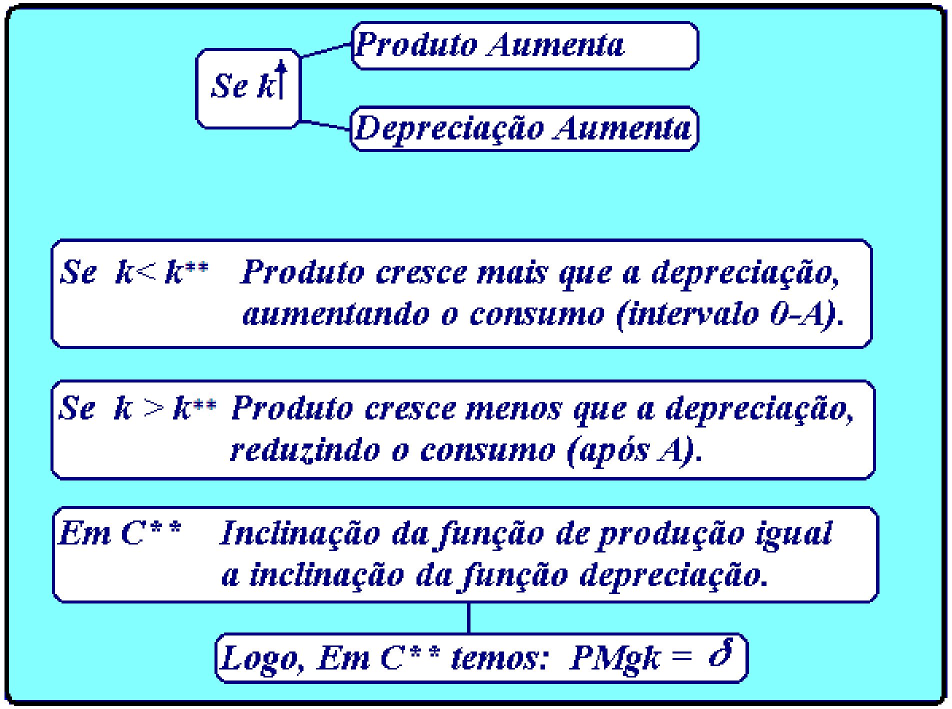
$$Como, \quad no \quad estado \quad estacionário \quad c^* = f\left(k^*\right) - \delta k^* :$$

$$Maximizando \quad o \quad consumo \rightarrow \frac{\partial c^*}{\partial k^*} = 0 \Rightarrow f'\left(k^*\right) - \delta = 0.$$

- Logo, para maximizarmos o consumo no estado estacionário devemos ter: $\boxed{PMgk = \delta}$

A Regra de Ouro (Golden Rule)





- Note que o consumo será o maior possível quando a inclinação da função de produção (PMgk), medida pela inclinação da reta tangente que pasa pelo ponto A, for igual a inclinação da curva de depreciação (δ).

A Regra de Ouro (Golden Rule)

- Utilizando os valores do exemplo anterior:

$$\delta = 0{,}1 \quad e \quad y = Ak^{0,5}, \quad com \quad A = 1, \quad temos:$$

$$c^{**} \Rightarrow PMgk = \delta \Rightarrow 0{,}5k^{**^{-0,5}} = 0{,}1 \Rightarrow k^{**^{-0,5}} = 0{,}2 \Rightarrow k^{**} = 0{,}2^{-2}$$

$$Assim, \quad k^{**} = \frac{1}{0{,}2^2} \Rightarrow \boxed{k^{**} = 25} \Rightarrow y^{**} = 5.$$

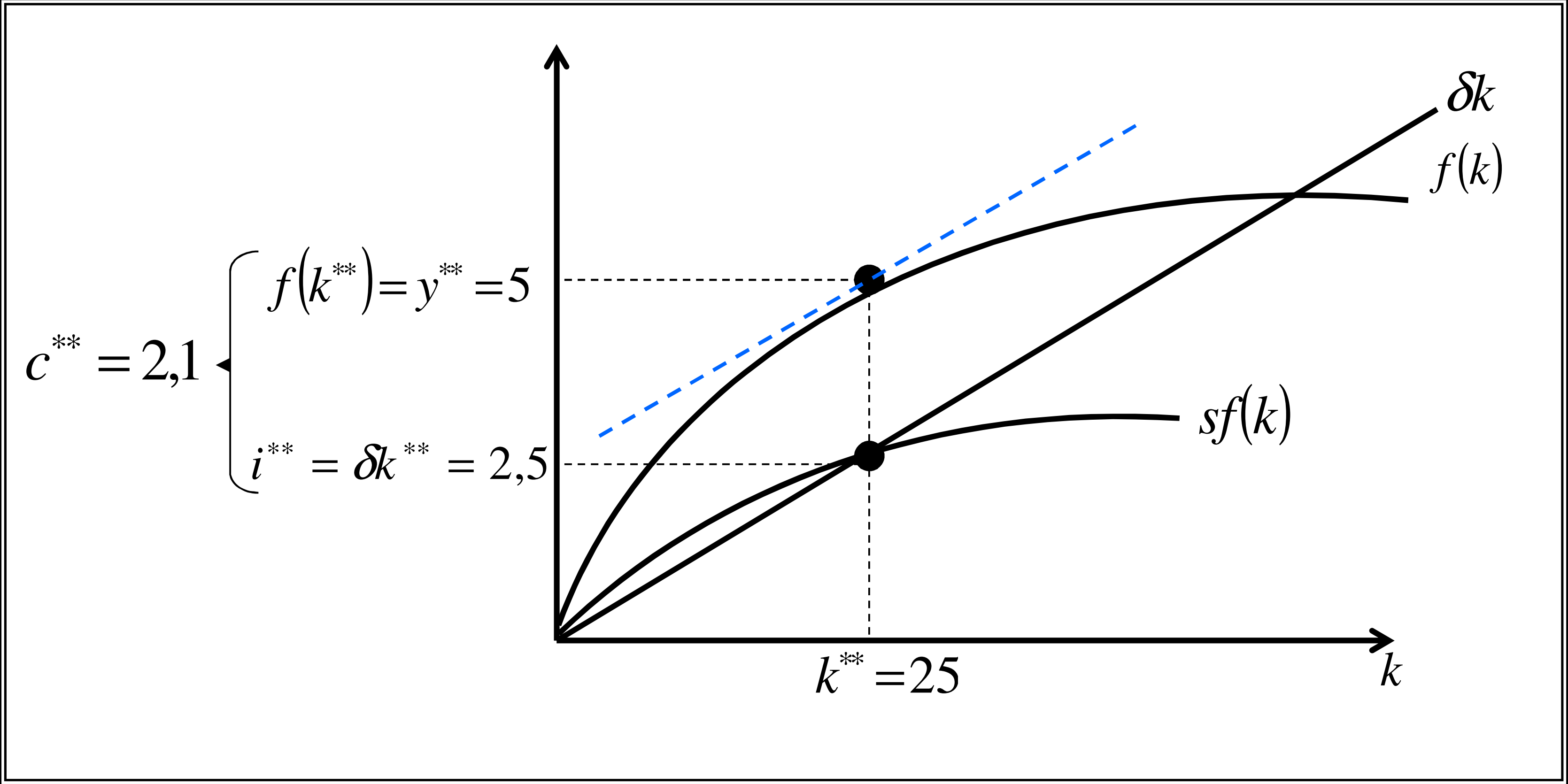
- Mas qual a taxa de poupança que leva a economia a obter o estado estacionário maximizador do consumo ?

$$Como \quad \dot{k} = sAk^{\alpha} - \delta k, \quad se \quad \dot{k} = 0 \Rightarrow \frac{k^*}{k^{*\alpha}} = \frac{sA}{\delta}$$

$$Logo, \quad s^* = Ak^{*(1-\alpha)}\delta \Rightarrow s^{**} = 0{,}5 \Rightarrow i^{**} = \delta k^{**} = 2{,}5$$

A Regra de Ouro (Golden Rule)

- Graficamente, temos:



A Regra de Ouro (Golden Rule)

- Logo, nesse caso, a escolha de uma taxa de poupança de 50% faz com que a economia convirja para um estado estacionário onde o consumo é maximizado.

- Observação Importante:
  - Note que a taxa de poupança maximizadora do consumo, nesse caso foi igual a 0,5, que é igual a α : isso não é uma coincidência. Podemos provar que a taxa de poupança maximizadora do consumo é sempre igual a elasticidade do capital (α).

A Regra de Ouro (Golden Rule)

- Provando que $s^{**} = \alpha$.

$$como \quad k^* = \left(\frac{s}{\delta+n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad e \quad y = k^\alpha \Rightarrow y^* = \left(\frac{s}{\delta+n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

- Em qualquer estado estacionário, temos:

$$c^* = y^* - sy^* \Rightarrow (1-s)\,y^* = (1-s)\left(\frac{s}{\delta+n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

A Regra de Ouro (Golden Rule)

- No estado estacionário maximizador do consumo temos dc*/ds = 0. Utilizando a regra da cadeia:

$$0 = (1-s)\frac{d}{ds}\left[\left(\frac{s}{\delta+n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right] + \left(\frac{s}{\delta+n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\frac{d}{ds}(1-s)$$

$$0 = (1-s)\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)s^{\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}-1\right)}\left(\frac{1}{\delta+n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \left(\frac{s}{\delta+n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\left(\frac{s}{\delta+n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = (1-s)\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)s^{\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}-1\right)}\left(\frac{1}{\delta+n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$1 = \frac{(1-s)}{s}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) \Rightarrow \boxed{s = \alpha}$$

Crescimento Demográfico

- Como a acumulação de capital não é suficiente para garantir o crescimento econômico continuado, precisamos ampliar o modelo, para explicá-lo. Comecemos variando N.

- Hipótese: $\frac{\dot{N}}{N} = n$
  - A População cresce a uma taxa constante n.

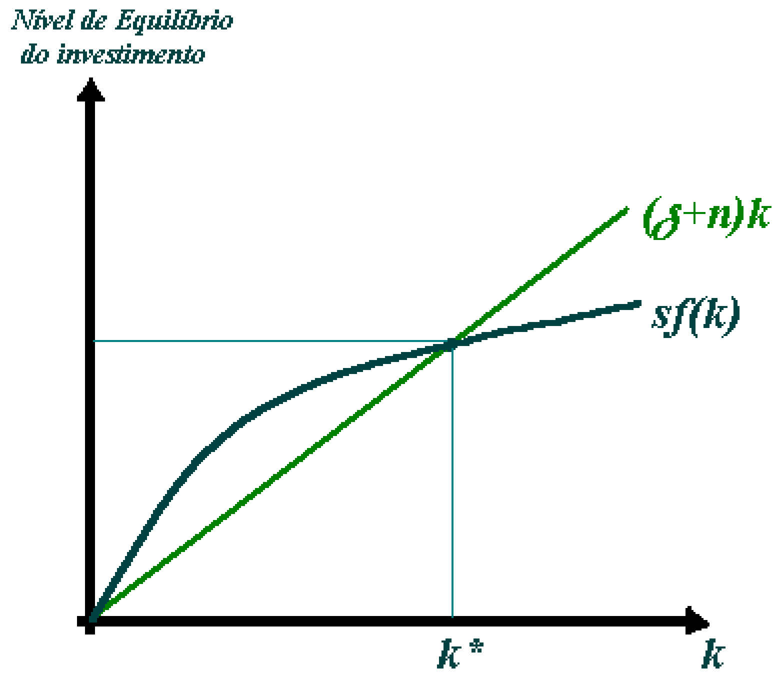
O Estado Estacionário Com CrescimentoDemográfico

- O crescimento populacional atua no sentido de reduzir o volume de capital por trabalhador, pois agora o capital é dividido por um nº maior de trabalhadores. Assim, temos:

$$\dot{k} = i - \delta k - nk \Rightarrow \boxed{\dot{k} = sf(k) - (\delta + n)k}$$

  - O termo $(\delta + n)k$ indica o montante de investimento para que $\dot{k} = 0$.

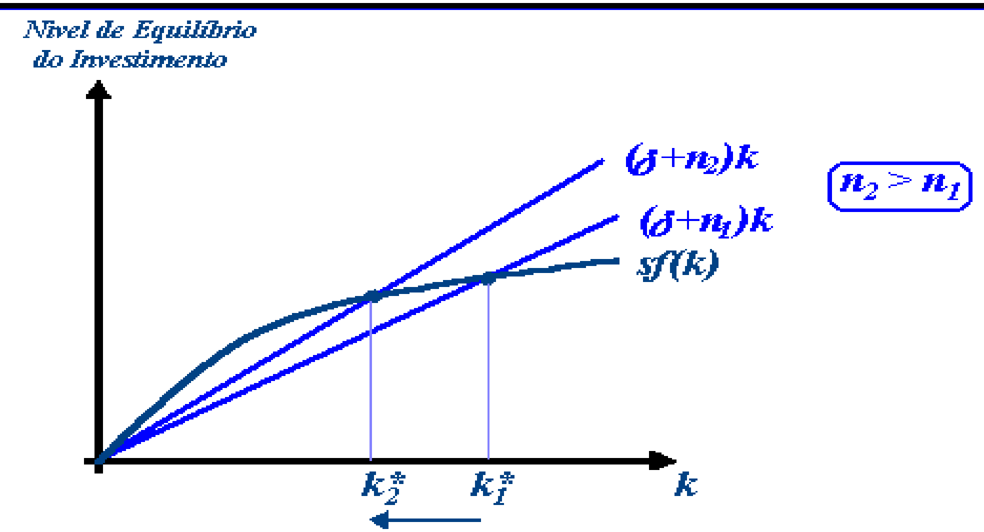
O Estado Estacionário Com CrescimentoDemográfico



Em k* : Δk = 0 e i* = (δ+n)k*

O Estado Estacionário Com CrescimentoDemográfico

- **Efeitos do Crescimento Populacional**
  - Como a população cresce a uma taxa n, o capital total e o produto total aumentam nessa mesma taxa. Assim, o padrão de vida não melhora, pois o produto por trabalhador permanece constante no estado estacionário. Logo, n pode aumentar somente o nível de produto total.



O aumento da taxa de crescimento populacional reduz o nível de capital por trabalhador. Como $y = f(k)$, com k^* menor, y^* também é menor. Logo, o alto crescimento demográfico implica em baixos níveis de produto per capita.

O Estado Estacionário

- O estado estacionário implica em $\dot{k}=0$, logo:

$$\dot{k} = sf(k) - (\delta + n)k \Rightarrow 0 = sf(k^*) - (\delta + n)k^* \Rightarrow \boxed{\frac{k^*}{f(k^*)} = \frac{s}{\delta + n}}$$

- Utilizando uma FDP Cobb-Douglas:

$$\dot{k} = sAk^{\alpha} - (\delta + n)k. \quad Com \quad \dot{k} = 0 \Rightarrow \frac{k}{k^{\alpha}} = \frac{sA}{\delta + n} \Rightarrow \boxed{k^* = \left(\frac{sA}{\delta + n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}$$

A Regra de Ouro

- Em qualquer estado estacionário, temos: $c^* = f(k^*) - (n+\delta)k^*$.

- Como $c^*_{máx} = c^{**} = \dfrac{\partial c^*}{\partial k^*} = 0 \Rightarrow f'(k^{**}) - (\delta + n) = 0 \Rightarrow \boxed{PMgk - \delta = n}$

Taxas de Crescimento no Estado Estacionário

- Taxas de Crescimento no estado estacionário

$$No \quad estado \quad estacionário \quad \dot{k} = 0 \Rightarrow \frac{\dot{k}}{k} = 0. \quad Logo, \quad \dot{y} = 0 \Rightarrow \frac{\dot{y}}{y} = 0$$

$$k = \frac{K}{N} \Rightarrow \ln k = \ln K - \ln N. \quad Diferenciando, \quad temos: \quad \underbrace{\cancel{\frac{\dot{k}}{k}}}_{0} = \frac{\dot{K}}{K} - \underbrace{\cancel{\frac{\dot{N}}{N}}}_{n} \Rightarrow \frac{\dot{K}}{K} = n$$

$$y = \frac{Y}{N} \Rightarrow \ln y = \ln Y - \ln N. \quad Diferenciando, \quad temos: \quad \underbrace{\cancel{\frac{\dot{y}}{y}}}_{0} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \underbrace{\cancel{\frac{\dot{N}}{N}}}_{n} \Rightarrow \frac{\dot{Y}}{Y} = n$$

- Logo, no estado estacionário, o estoque de capital per capita e o produto per capita crescem à taxa zero e o estoque de capital total e o produto total crescem à taxa n.

A Transição para a Regra de ouro

- **Transição Para o Ponto Ótimo do Estado Estacionário**

  - **Consumo Presente X Consumo Futuro**

  - **Em toda a economia as decisões devem ser entre prover para o presente (consumo) e prover para o futuro (acumulação de capital). Mais consumo é preferível a menos consumo em qualquer momento do tempo, entretanto, mais consumo significa menos acumulação de capital, menor produção futura e, portanto, menor consumo potencial futuro. Em um extremo temos a política de consumir o máximo possível hoje, mesmo que isto comprometa o consumo futuro:**

  - ***"vivamos hoje, pois no futuro estaremos todos mortos". (J.M.Keynes)***

A Transição para a Regra de ouro

- **No outro extremo encontra-se a política stalinista de consumir hoje o menos possível, incrementando a acumulação de capital e aumentando o consumo potencial futuro.**
- **Estas escolhas implicam em um conjunto de trajetórias temporais para o consumo, produção e estoque de capital, trajetórias ao longo das quais crescerá a economia. Para fazermos tal escolha, devemos julgar o valor do consumo presente frente ao consumo futuro, para então escolhermos uma trajetória de crescimento ótimo para a economia.**
- **Até aqui, assumimos que o formulador de política econômica pode escolher o estado estacionário da economia. Desta forma, ele optará pelo ponto ótimo do estado estacionário, que implica em mais consumo hoje. Supondo que a economia atinja um outro estado estacionário, temos:**

A Transição para a Regra de ouro

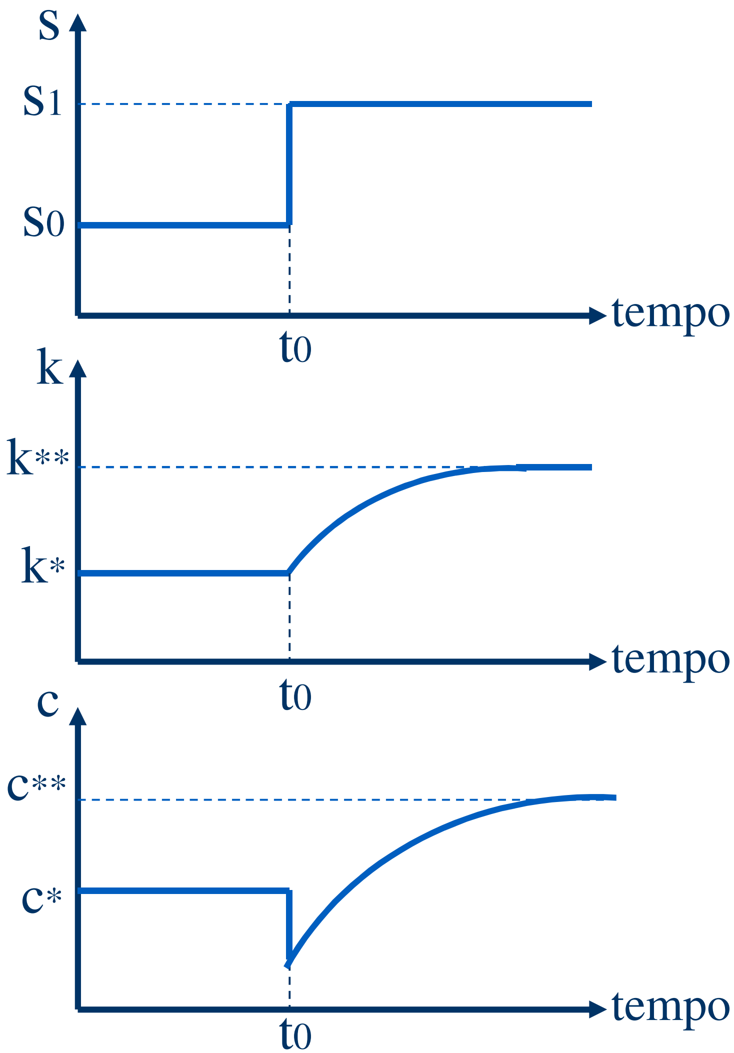
- **k*> k**** $\Rightarrow$ necessidade de redução de k, via diminuição da poupança.

• **Consequências:** elevação imediata do consumo e queda no investimento. No longo prazo, o consumo permanece maior, dado que anterior mente k* > k**. Entretanto, o produto e o investimento serão menores.

- **k*< k**** $\Rightarrow$ necessidade de aumento em k, via aumento da poupança.

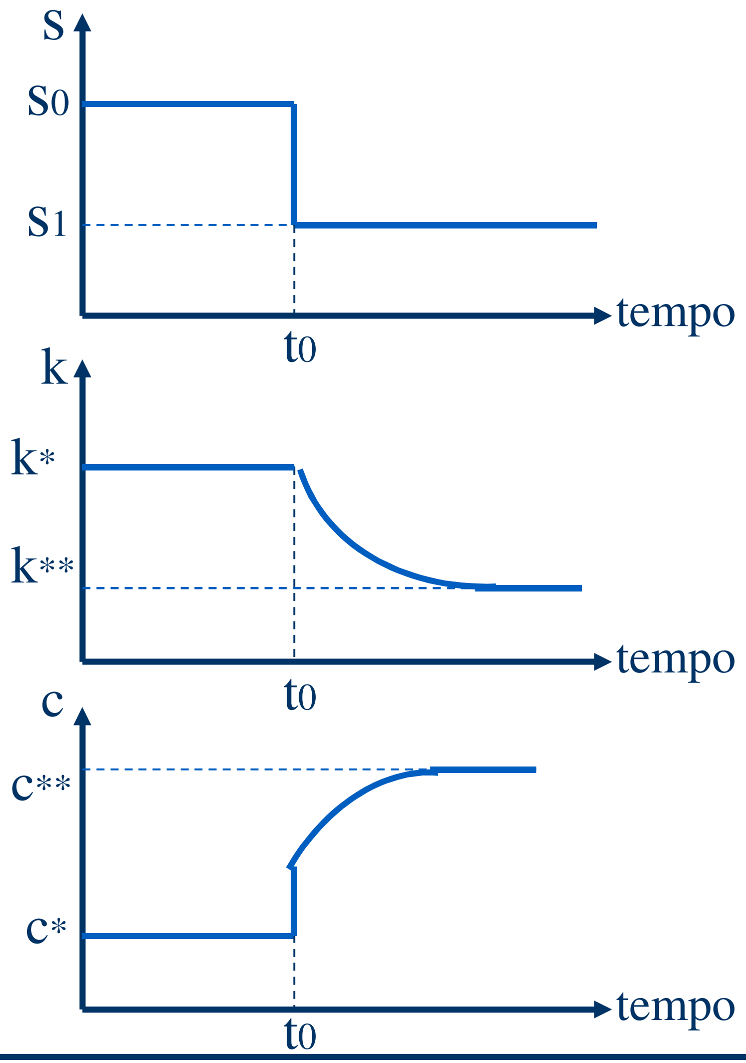
• **Consequências:** queda imediata no consumo e aumento no investimento. No longo prazo, dada a maior acumulação de capital e k* < k**, o consumo o investimento e o produto aumentam. Note que, neste caso, até a economia atingir k**, a economia passa por um período de restrição ao consumo, mas esta estratégia beneficia as gerações futuras.

Aumento da Taxa de Poupança Quando k* < k**



- Como o estoque de capital *per capita* é inferior ao estoque de capital *per capita* dado pela “regra de ouro”, a maximização do consumo exige um aumento da taxa de poupança.
- O aumento da taxa de poupança, dada a mesma renda *per capita*, inicialmente reduz o consumo *per capita*. Entretanto, como a PMgk é maior que a taxa de depreciação, o consumo aumenta ao longo do tempo, atingindo seu nível máximo c**.

Aumento da Taxa de Poupança Quando k* > k**



- Como o estoque de capital *per capita* é superior ao estoque de capital *per capita* dado pela "regra de ouro", a maximização do consumo exige uma redução da taxa de poupança.
- A redução da taxa de poupança, dada a mesma renda *per capita*, inicialmente aumenta o consumo *per capita*. Com o investimento menor que a depreciação, o estoque de capital *per capita* se reduz ao longo do tempo. Entretanto, como a PMgk é menor que a taxa de depreciação, o consumo aumenta ao longo do tempo, atingindo seu nível máximo c**.

A Transição para a Regra de ouro

- **Conclusão:** o nível ótimo de acumulação depende do julgamento que fazemos hoje dos interesses das diversas gerações.

- **Sobre a Regra de Ouro:**

"Aquilo que esperai que os outros vos façam fazei também a eles da mesma forma".

(S.Lucas, cap.7, versículo 31)

"Cada geração poupa (para as gerações futuras) aquela fração da renda que as gerações passadas teriam poupado para ela".

(E.Phelps, "Golden Rules of Economic Growth")

Progresso Tecnológico e Taxa de Crescimento

- O progresso tecnológico tem várias dimensões. Pode significar:
  - quantidades maiores de produto
  - produtos melhores
  - produtos novos
  - maior variedade de produtos
- O progresso tecnológico leva a aumentos no produto para um dado montante de capital e trabalho.

Progresso Tecnológico "Aumentador de Trabalho"

- **Até aqui trabalhamos com uma função de produção sem a possibilidade de incrementos na tecnologia. Agora, consideraremos a possibilidade de incrementos exógenos na tecnologia.** $Y = f\left(K, NA\right)$ $, onde:$
  - A = eficiência do trabalho;
  - NA = mão de obra medida em unidades de eficiência.

- **Ou seja, trabalharemos com a hipótese de que o progresso tecnológico leva à eficiência do trabalho, que crescerá a uma taxa constante g_A.**

- **Como** $\frac{\dot{N}}{N} = n$ **e** $\frac{\dot{A}}{A} = g_A$ **o número de unidades eficientes (NA)**

aumenta a uma taxa (n+g_A)

Progresso Tecnológico “Aumentador de Trabalho”

- O progresso tecnológico reduz o número de trabalhadores necessários para obter uma dada quantidade de produto.
- O progresso tecnológico aumenta *AN*, que podemos considerar como a quantidade de **trabalho efetivo,** ou trabalho em **“unidades de eficiência”** na economia.
- Analisaremos o estado estacionário com as variáveis em termos de unidades de eficiência. Portanto:

$\hat{k} = \dfrac{K}{NA} \rightarrow \; capital \;\; por \;\; unidade \;\; de \;\; eficiência$
$\hat{y} = \dfrac{K}{NA} \rightarrow \; produto \;\; por \;\; unidade \;\; de \;\; eficiência$

Progresso Tecnológico "Aumentador de Trabalho"

- A relação entre produto por trabalhador efetivo e capital por trabalhador efetivo é:

$$Y = f(K, NA) \Rightarrow se \quad \lambda = \frac{1}{NA} \Rightarrow \frac{Y}{NA} = f\left(\frac{K}{NA}, 1\right) \Rightarrow \hat{y} = f\left(\hat{k}\right)$$

- Portanto, o produto por trabalhador efetivo é função do estoque de trabalhador efetivo.

Progresso Tecnológico "Aumentador de Trabalho"

- Desta forma, a equação dinâmica de Solow deve ser expressa como:

$$\dot{\hat{k}} = sf\left(\hat{k}\right) - \left(\delta + n + g_A\right)\hat{k}$$

- Note que, desta forma, para que $\dot{\hat{k}} = 0$ o investimento deve ser igual a $i = (\delta + n + g_A)\hat{k}$.

- Ou seja, para que $\left(\frac{K}{NA}\right)$ permaneça constante, com $\delta > 0$, $\frac{\dot{N}}{N} = n$ e $\frac{\dot{A}}{A} = g_A \Rightarrow i = \left(\delta + n + g_A\right)\hat{k}$

Progresso Tecnológico "Aumentador de Trabalho"

- Explicando melhor:
  - Como o estoque de capital se deprecia à taxa δ , é necessário um montante de investimento δK apenas para manter o estoque de capital constante. Como a força de trabalho cresçe à taxa n e o progresso teconológico à taxa g_A , a taxa de crescimento do trabalho efetivo ou por unidades de eficiência, NA, é igual a n + g_A . Portanto, para manter o estoque de capital por unidades de eficiência constante a taxa de investimento deve ser: $i = (\delta + n + g_A)\hat{k}$.
  - Desta forma, se a taxa de depreciação for de 10% e o crescimento do trabalho efetivo for de 3% (n=2% e g_A=1%), o investimento deve ser igual a 13% do estoque de capital pra manter um nível constante de capital por trabalhador efetivo.

O Estado Estacionário

- Sendo $\dot{\hat{k}} = sf\left(\hat{k}\right) - (\delta + n + g_A)\hat{k}$:

$$\dot{\hat{k}} = 0 \Rightarrow sf\left(\hat{k}^*\right) = (\delta + n + g_A)\hat{k}^*$$

- Logo: $\boxed{\dfrac{\hat{k}^*}{f\left(\hat{k}^*\right)} = \dfrac{s}{(\delta + n + g_A)}}$

O Estado Estacionário

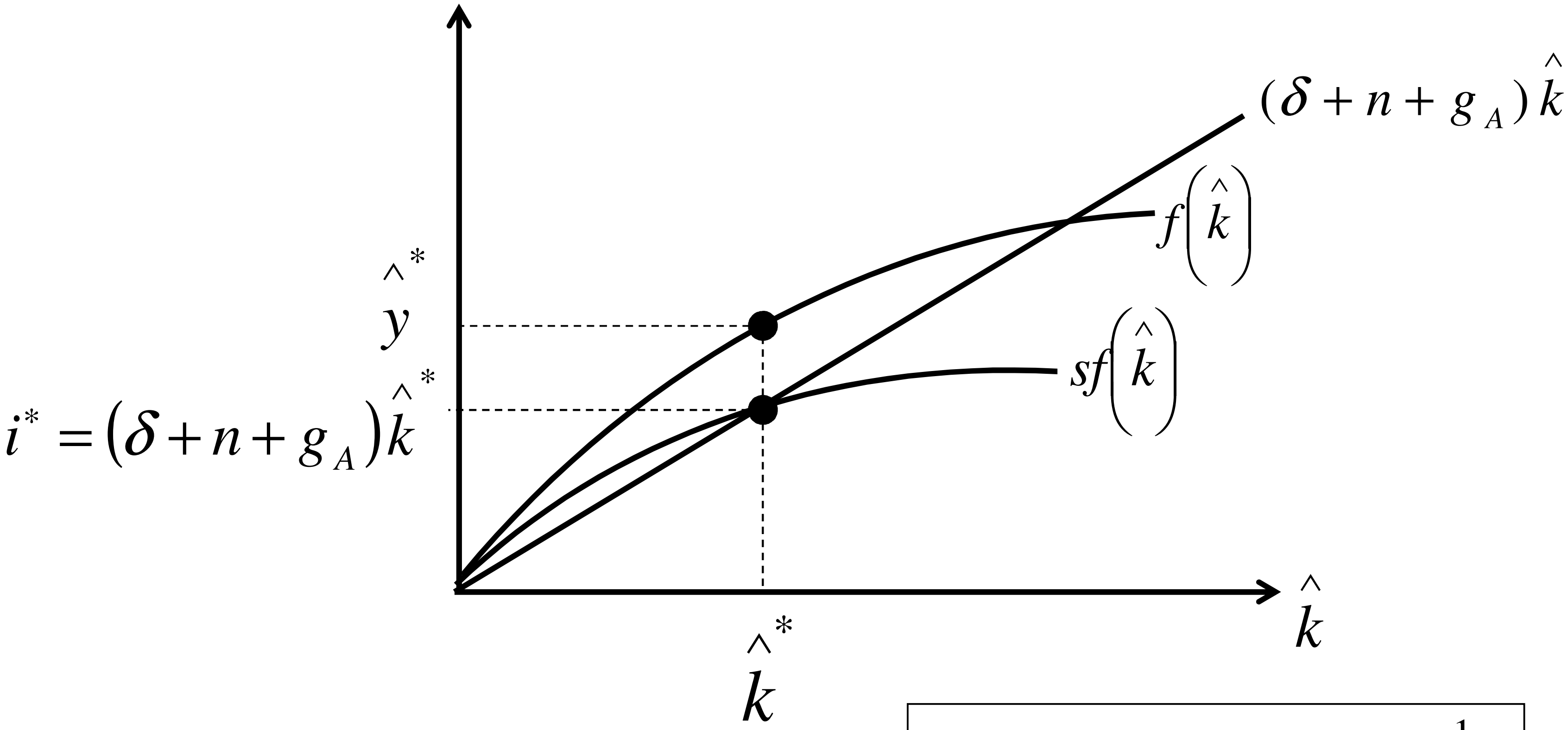
- Utilizando uma função do tipo Cobb-Douglas, temos:

$$Se \quad Y = K^{\alpha}(NA)^{1-\alpha} \quad e \quad \lambda = \frac{1}{NA} \Rightarrow \frac{Y}{NA} = \frac{K^{\alpha}(NA)^{1-\alpha}}{NA} \Rightarrow \boxed{\hat{y} = \hat{k}^{\alpha}}$$

$$Se \quad \dot{\hat{k}} = 0 \Rightarrow s\,\hat{k}^{*\,\alpha} = (\delta + n + g_A)\hat{k}^{*} \Rightarrow \frac{\hat{k}^{*}}{\hat{k}^{*\,\alpha}} = \frac{s}{(\delta + n + g_A)}$$

$$\hat{k}^{*\,1-\alpha} = \frac{s}{(\delta + n + g_A)} \Rightarrow \boxed{\hat{k}^{*} = \left(\frac{s}{\delta + n + g_A}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}$$

O Estado Estacionário



$$\boxed{\hat{k}^* = \left(\frac{s}{\delta + n + g_A}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}$$

Taxas de Crescimento no Estado Estacionário

$$Como \quad \dot{\hat{k}} = 0 \Rightarrow \frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} = 0. \quad Com \quad isso, \quad \dot{\hat{y}} = 0 \Rightarrow \frac{\dot{\hat{y}}}{\hat{y}} = 0$$

$$Como \quad \hat{k} = \frac{K}{NA} \Rightarrow \ln \hat{k} = \ln K - \ln N - \ln A. \quad Diferenciando, \quad temos:$$

$$\cancelto{0}{\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}}} = \frac{\dot{K}}{K} - \cancelto{n}{\frac{\dot{N}}{N}} - \cancelto{g_A}{\frac{\dot{A}}{A}} \Rightarrow \frac{\dot{K}}{K} = \left(n + g_A\right) \Rightarrow \boxed{\frac{\dot{k}}{k} = g_A}$$

$$Como \quad \hat{y} = \frac{Y}{NA} \Rightarrow \ln \hat{y} = \ln Y - \ln N - \ln A. \quad Diferenciando, \quad temos:$$

$$\cancelto{0}{\frac{\dot{\hat{y}}}{\hat{y}}} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \cancelto{n}{\frac{\dot{N}}{N}} - \cancelto{g_A}{\frac{\dot{A}}{A}} \Rightarrow \frac{\dot{Y}}{Y} = \left(n + g_A\right) \Rightarrow \boxed{\frac{\dot{y}}{y} = g_A}$$

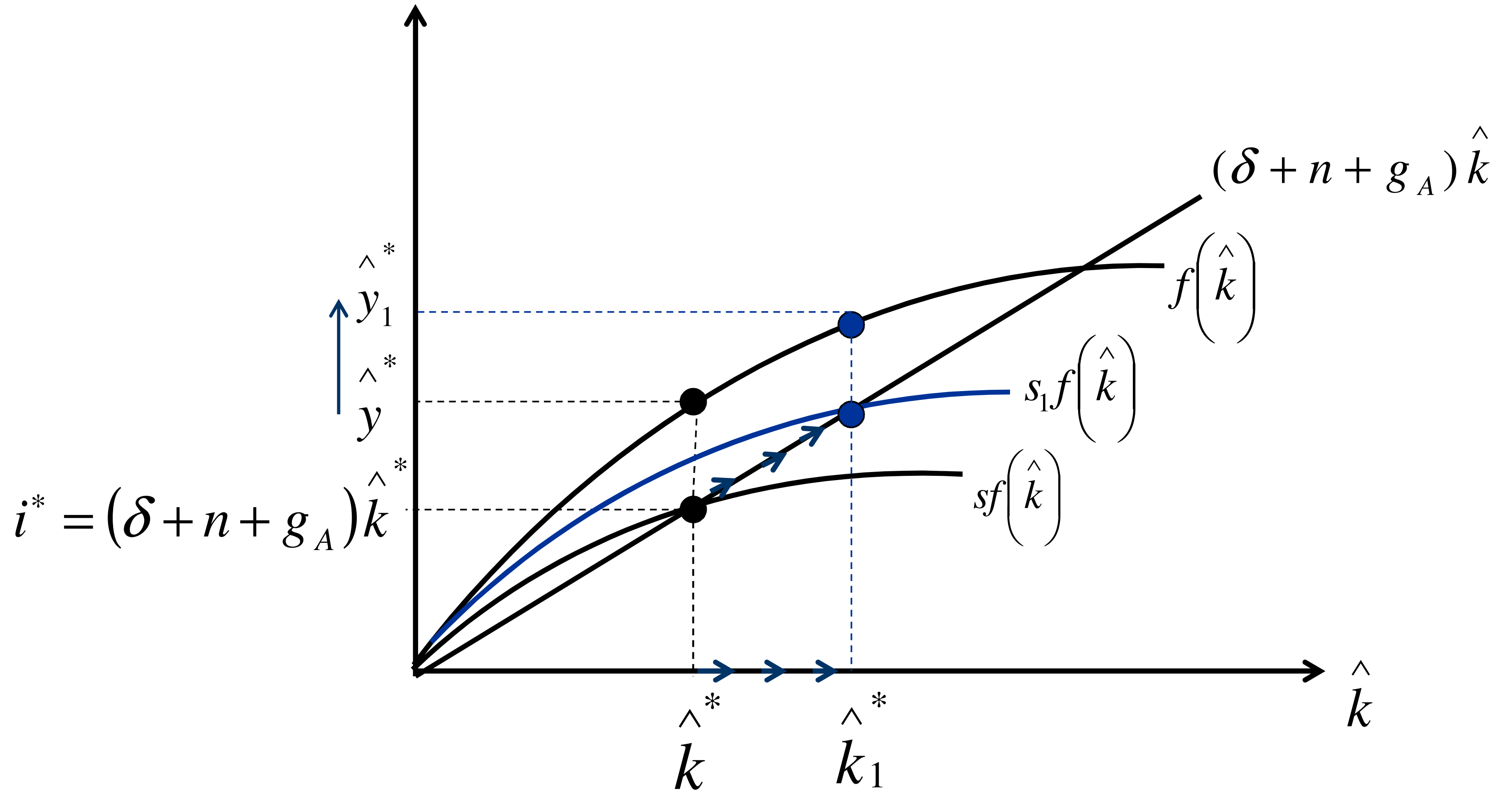
Dinâmica do Capital e do Produto

- No estado de crescimento equilibrado, o produto (*Y*) cresce à mesma taxa que o trabalho efetivo (*AN*); o trabalho efetivo cresce à taxa de ($n+g_A$); portanto, no estado de crescimento equilibrado, o crescimento do produto é de ($n+g_A$). O capital por trabalhador efetivo também cresce à taxa de ($n+g_A$).
- A taxa de crescimento do produto independe da taxa de poupança.
- Como o produto, o capital e o trabalho efetivo crescem todos à mesma taxa ($n+g_A$), esse estado da economia é chamado de estado de *crescimento equilibrado*.
- Como a força de trabalho cresce à taxa n, tanto o estoque de capital *per capita* quanto o produto *per capita* crescem à taxa g_A.

Dinâmica do Capital e do Produto

Características do crescimento equilibrado		
	Taxa de crescimento de	
1	Capital por trabalhador efetivo	0
2	Produto por trabalhador efetivo	0
3	Capital por trabalhador	g_A
4	Produto por trabalhador	g_A
5	Trabalho	n
6	Capital	$n + g_A$
7	Produto	$n + g_A$

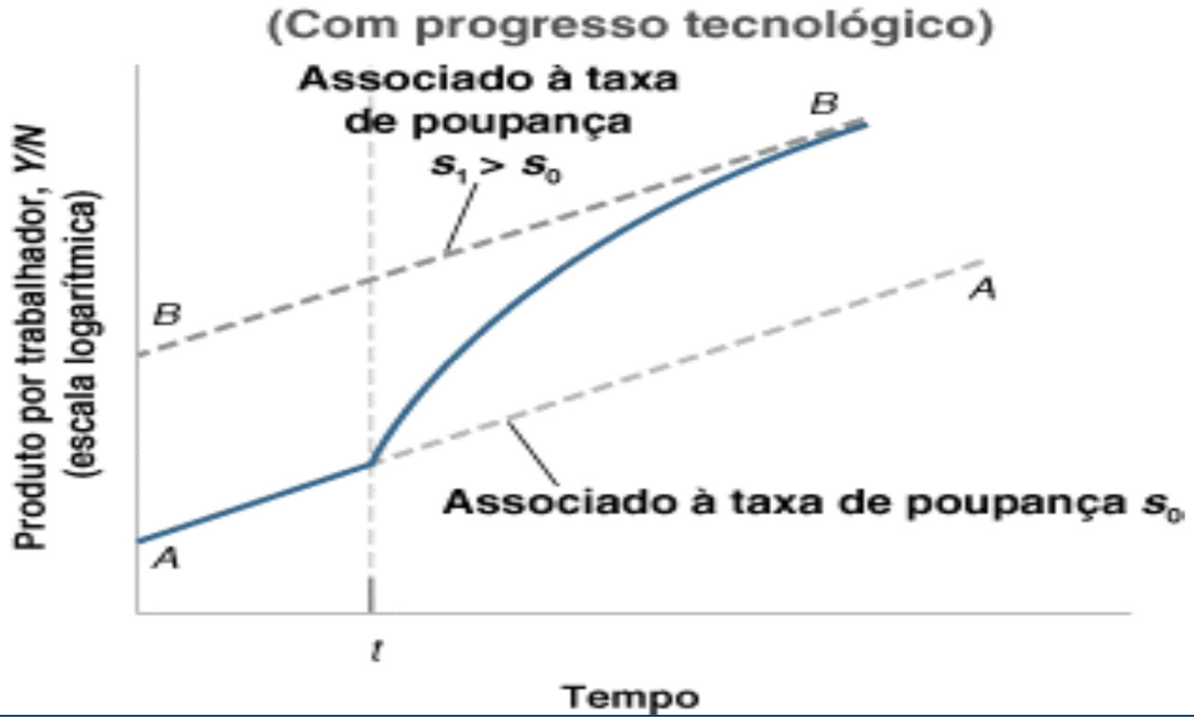
Um Aumento na Taxa de poupança



A Taxa de Poupança e o Produto

◆***Efeitos do aumento da taxa de poupança no produto por trabalhador em uma economia com progresso tecnológico.***

◆O aumento da taxa de poupança gera um período de maior crescimento até que a economia atinja um novo estado estacionário, onde a taxa de crescimento do produto *per capita* volta a ser igual a g_A.



A Contabilidade do Crescimento

- Em 1957 Solow sugeriu uma forma de estimar o progresso tecnológico.
- Hipótese:
  - Cada fator de produção é remunerado por sua PMg.

- **Logo, se** $W_A = 30{,}00 \Rightarrow PMg_N^A = 30{,}00$

A Contabilidade do Crescimento

$$Assim, \quad se \quad Y = AK^{\alpha}N^{1-\alpha} \Rightarrow \ln Y = \ln A + \alpha \ln K + (1-\alpha)\ln N$$

- Diferenciando em relação ao tempo, temos:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{A}}{A} + \alpha\frac{\dot{K}}{K} + \underbrace{(1-\alpha)}\frac{\dot{N}}{N}$$

$(1-\alpha) \rightarrow (wL/PY) \Rightarrow$ Participação relativa do fator do trabalho no PIB

$\alpha \rightarrow [1-(wL/PY)] \Rightarrow$ Participação relativa do fator do capital no PIB

Logo, isolando a taxa de crescimento do progresso tecnológico, temos:

$$\boxed{\frac{\dot{A}}{A}} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \left[\alpha\frac{\dot{K}}{K} + (1-\alpha)\frac{\dot{N}}{N}\right]$$

"resíduo de Solow" ou taxa de crescimento da produtividade total dos fatores (PTF)

A Contabilidade do Crescimento: Dados para o Brasil

TABELA 1
Contabilidade do crescimento

Períodos	CN[a]	Crescimento do produto potencial (% a.a.)	Crescimento dos fatores		PIB (% a.a.)	Composição do crescimento		
			Capital	Trabalho		Capital	Trabalho	PTF[b]
1993-1995	Antigas	4,0	3,9	2,2	5,0	1,9	1,2	1,9
	Novas	3,9	3,6	2,2	4,8	1,4	1,4	2,0
1996-2003	Antigas	2,1	2,3	1,6	1,9	1,1	0,8	0,0
	Novas	2,2	2,1	1,6	1,9	0,8	1,0	0,1
2004-2006	Antigas	2,8	2,6	2,2	3,4	1,2	1,2	1,0
	Novas	3,4	2,5	2,2	4,1	1,0	1,4	1,7

Fonte: Ipea. Cálculos feitos por José Ronaldo de Castro Souza Júnior.

[a] Contas Nacionais.

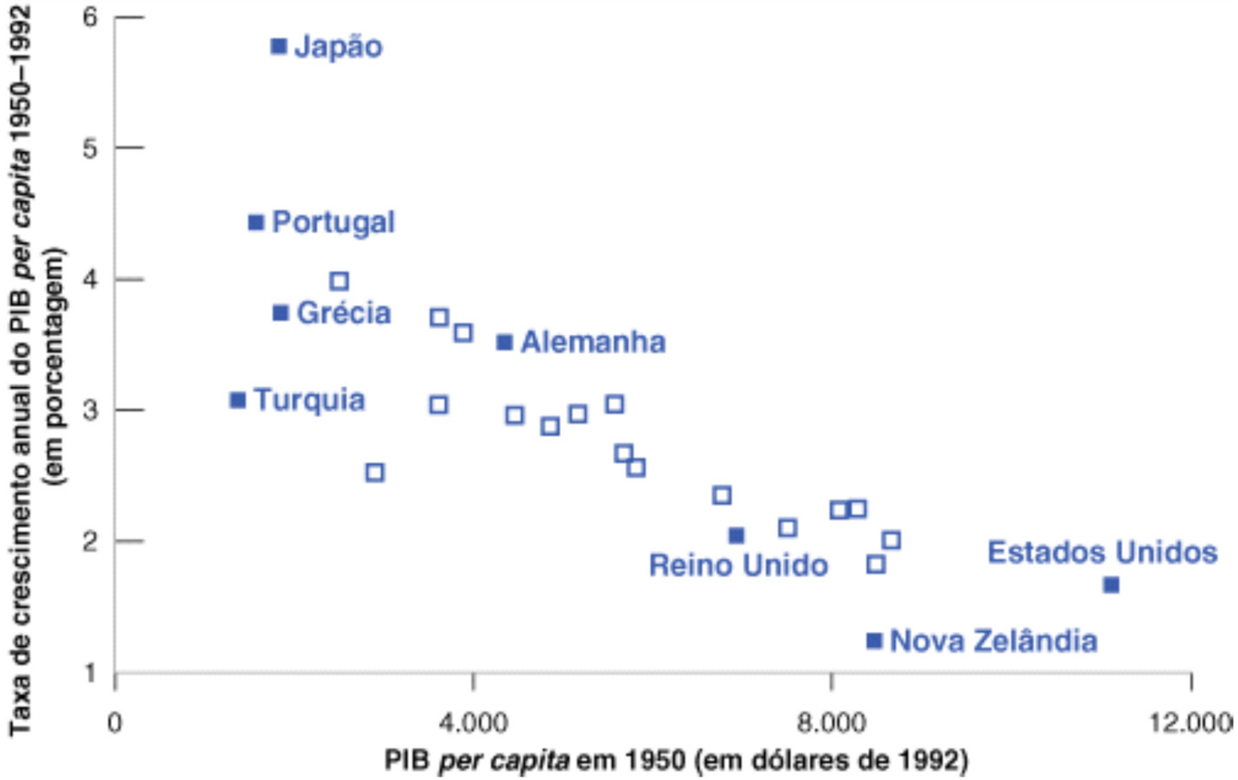
[b] Produtividade Total dos Fatores.

Mais Uma Vez a Convergência

- Os países pobres tendem a crescer mais rapidamente que os países ricos ?
- Razões para justificar a convergência
  - Diferença de produto por rabalhador associada aos diferentes pontos sobre as trajetórias de crescimento.
  - A PMgK é maior quanto menor o estoque de capital, incentivando a migração de capital dos países ricos para os países pobres.
  - Se a difusão de novos conhecimentos tecnológicos é desigual, é possível que as diferenças de produto per capita se devam ao fato de alguns países não utilizarem as melhores técnicas de produção disponíveis. Essas diferenças tenderiam a reduzir-se a medida que os países mais pobres tivessem acesso as técnicas mais modernas

Crescimento nos Países Ricos a Partir de 1950

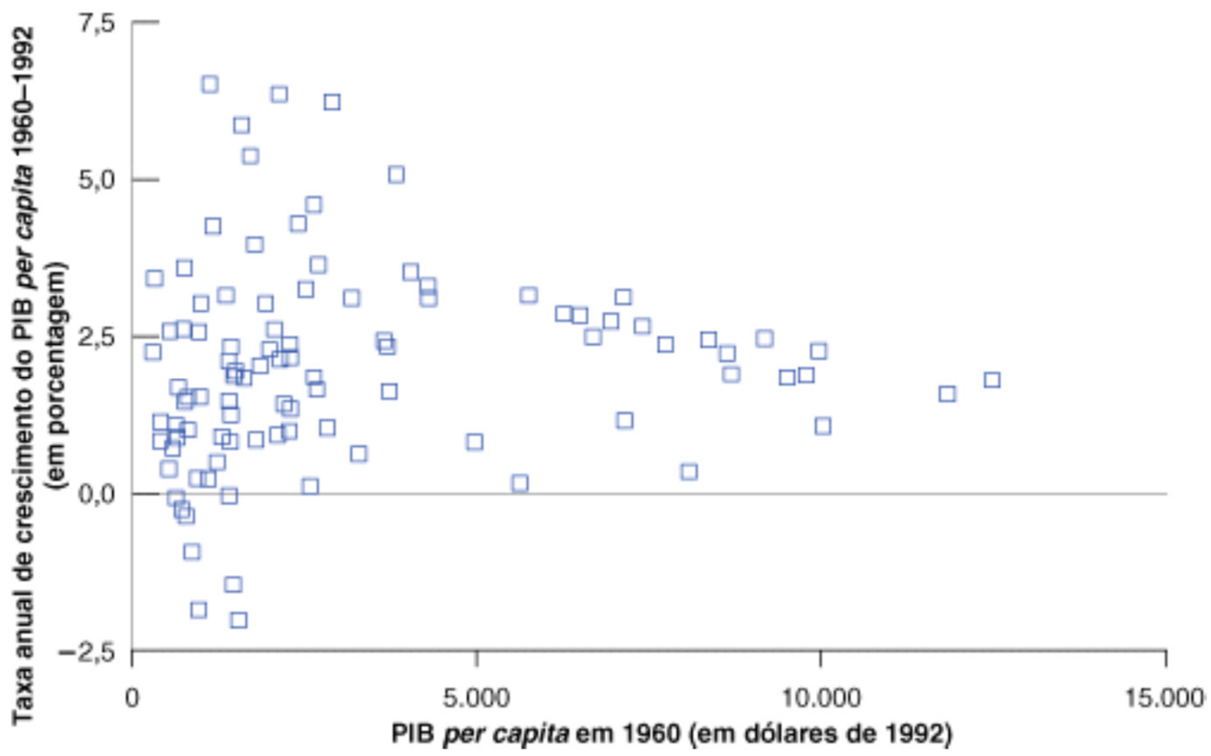
Taxa de crescimento do PIB per capita *desde 1950* versus *PIB* per capita *em 1950; países da OCDE*



Países com um nível mais baixo de produto *per capita* em 1950 em geral cresceram mais rápido.

Uma Amostra com 101 Países

Taxa de crescimento do PIB* per capita, *1960-1992,* versus *o PIB* per capita *em 1960 (dólares de 1992); 101 países

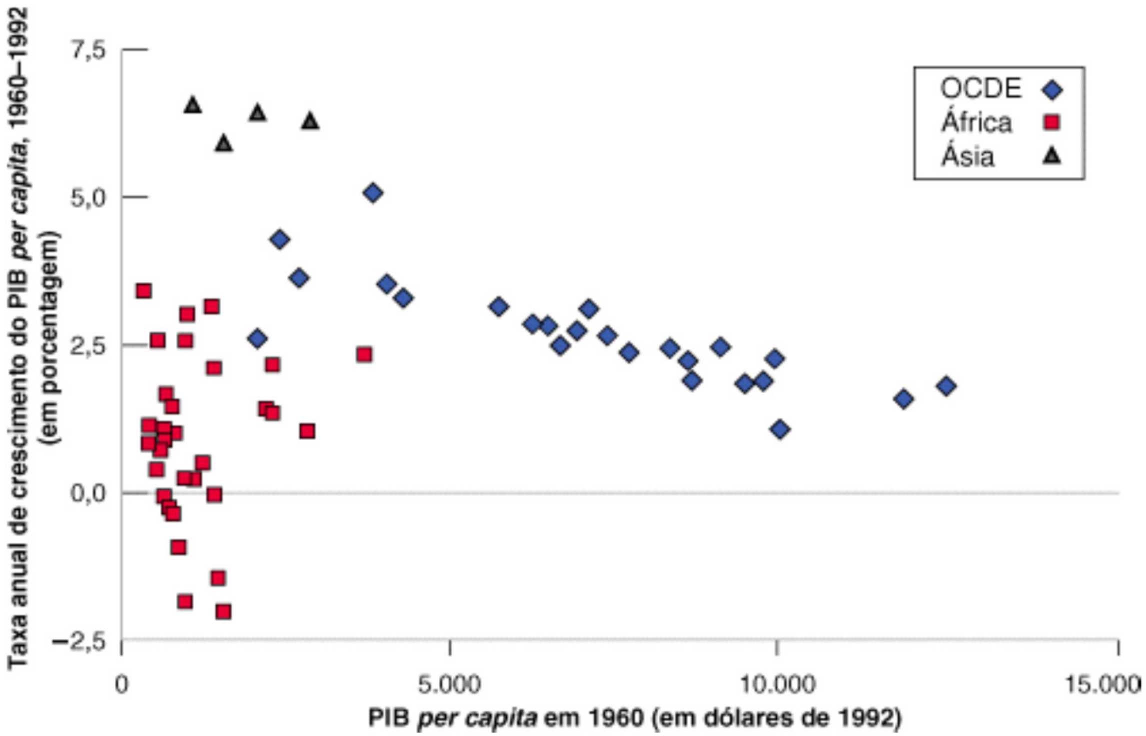


Não há relação clara entre a taxa de crescimento do produto desde 1960 e o nível do produto *per capita* em 1960.

Exame dos Países

◆*Taxa de crescimento do PIB* **per capita**, *1960-1992,* **versus** *PIB* **per capita** *em 1960; OCDE, África e Ásia*

◆**Os países asiáticos estão convergindo para os níveis da OCDE. Não há evidência de convergência entre os países africanos.**



Os quatro triângulos no canto superior esquerdo correspondem aos *quatro tigres*: Coréia do Sul, Hong Kong, Singapura e Taiwan. Os quatro tiveram taxas anuais de crescimento do PIB acima de 6% nos últimos 30 anos.

A Convergência Absoluta

- Entre os países que apresentam o mesmo estado estacionário a hipótese de convergência absoluta se sustenta: maior crescimento dos países pobres, na média.

$$\boxed{k^{*}=\left(\frac{sA}{\delta+n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}$$

- Se duas economias possuem os mesmos parâmetros que determinam o estado estacionário (s, A, δ, n e α), vale a convergência absuluta, ou seja:

$$\boxed{\left(\frac{\dot{y}}{y}\right)_{Pobre} > \left(\frac{\dot{y}}{y}\right)_{Rico}}$$

A Convergência Condicional (relativa)

- O modelo de Solow pode explicar as diferentes taxas de crescimento de diferentes países.
- Embora os países pobres não cresçam necessariamente a uma taxa mais elevada, os países pobres, em relação ao seu próprio estado estacionário, tendem a crescer à taxas mais elevadas.
- Chamamos isso de convergência condicional ou relativa.

Capital Físico *versus* Capital Humano

- Até agora não fizemos qualquer distinção entre o trabalho não-qualificado e o trabalho qualificado, que depende do nível educacional.
  - O conjunto de competências dos trabalhadores ativos na economia é chamado de ***capital humano***.
  - Uma economia com muitos trabalhadores altamente qualificados tende a ser muito mais produtiva do que uma economia em que a maioria dos trabalhadores são iletrados.
  - As conclusões tiradas sobre o acúmulo de capital físico permanecem válidas após a inclusão do capital humano na análise.

Estendendo a Função de Produção

- Quando o nível de produto por trabalhador depende tanto do nível de capital físico por trabalhador (*K/N*) quanto do nível de capital humano por trabalhador (*H/N*), a função de produção pode ser escrita como:

$$\frac{Y}{N} = f\left(\frac{K}{N}, \frac{H}{N}\right) \Rightarrow y = f\left(\overset{(+)}{k}, \overset{(+)}{h}\right)$$

  - O aumento do capital por trabalhador ou do nível médio de competências gera maior produto por trabalhador.

Estendendo a Função de Produção

- Uma medida do capital humano pode ser construída da seguinte forma:
  - Suponha que uma economia possua 100 trabalhadores, metade dos quais são qualificados e metade não.
  - O salário relativo dos trabalhadores qualificados (assim como a produtividade) é o dobro do salário dos não-qualificados. Então:

$$\boxed{H = [(50 \times 1) + (50 \times 2)] = 150 \Rightarrow \frac{H}{N} = \frac{150}{100} = 1.5}$$

Capital Humano, Capital Físico e Produto

- O aumento de quanto a sociedade "poupa" sob a forma de capital humano – por meio da educação ou do treinamento no trabalho – aumenta o capital humano do estado de crescimento equilibrado por trabalhador e, portanto, o produto por trabalhador.
- No longo prazo, o produto por trabalhador depende tanto de quanto a sociedade poupa como de quanto (e como) gasta com educação.

Capital Humano, Capital Físico e Produto

- Nos Estados Unidos, os gastos com educação formal representam aproximadamente 6,5% do PIB, comparados aos 16% de investimento em capital físico. Esta comparação:
  - Considera o fato de que a educação é, em parte, consumo.
  - Não considera o custo de oportunidade da instrução.
  - Não considera o custo de oportunidade do treinamento no trabalho.
  - Considera o investimento bruto, não o líquido.
    - A depreciação do capital humano é mais lenta do que a do capital físico.

Crescimento Endógeno

- Um estudo recente concluiu que o produto por trabalhador depende tanto dos níveis de capital físico quanto de capital humano na economia.
- Os modelos que geram um crescimento contínuo sem progresso tecnológico são chamados de modelos de ***crescimento endógeno***, em que o crescimento depende de variáveis como a taxa de poupança e a taxa de gasto com educação.

Determinantes do Progresso Tecnológico

- O progresso tecnológico nas economias modernas é resultado das atividades de ***pesquisa e desenvolvimento (P&D)*** das empresas. A P&D produz fundamentalmente idéias.
- Os gastos com P&D dependem de:
  - Da ***fertilidade*** do processo de pesquisa ou de como os gastos com P&D se traduzem em novas idéias e novos produtos.
  - Da ***apropriabilidade*** dos resultados da pesquisa ou da extensão em que as empresas se beneficiam dos resultados de seu próprio processo de P&D.

Fertilidade do Processo de Pesquisa

- Os determinantes da fertilidade das pesquisas incluem:
  - A interação entre a pesquisa básica (a busca de princípios gerais e resultados) e a pesquisa aplicada e desenvolvimento (aplicação desses resultados a usos específicos).
  - O país: alguns países têm mais sucesso na pesquisa básica; outros são mais bem-sucedidos na pesquisa aplicada.
  - Tempo: são necessários muitos anos e, com freqüência, muitas décadas, para que todo o potencial das grandes descobertas seja percebido.

Apropriabilidade dos Resultados da Pesquisa

- Se as empresas não puderem se apropriar dos lucros do desenvolvimento de novos produtos, elas não investirão em P&D. Os fatores em jogo incluem:
  - A própria natureza do processo de pesquisa.
  - É compensador ser o primeiro a descobrir um produto?
  - Proteção legal. As ***patentes*** dão à empresa que descobriu um novo produto o direito de impedir durante algum tempo que outras empresas produzam ou utilizem o novo produto.

Os Fatos do Crescimento Revisitados

- **Acumulação de Capital *versus* Progresso Tecnológico**

- O crescimento rápido pode vir de duas fontes:
  - Uma taxa maior de progresso tecnológico. Se g_A for maior, a taxa de crescimento equilibrado do produto ($g_Y = g_A + n$) também será maior. Nesse caso, a taxa de crescimento do produto é igual à taxa de progresso tecnológico.
  - O ajuste do capital por trabalhador efetivo, K/AN, para um nível mais elevado. Nesse caso, a taxa de crescimento do produto supera a taxa de progresso tecnológico.

Acumulação de Capital *versus* Progresso Tecnológico

Taxas médias anuais de crescimento do produto *per capita* e do progresso tecnológico nos cinco países ricos, 1950-1987

	Crescimento do produto *per capita* (%)			Taxa de progresso tecnológico (%)		
	1950-73 (1)	1973-87 (2)	Variação (3)	1950-73 (4)	1973-87 (5)	Variação (6)
França	4,0	1,8	– 2,2	4,9	2,3	– 2,6
Alemanha	4,9	2,1	– 2,8	5,6	1,9	– 3,7
Japão	8,0	3,1	– 4,9	6,4	1,7	– 4,7
Reino Unido	2,5	1,8	– 0,7	2,3	1,7	– 0,6
Estados Unidos	2,2	1,6	– 0,6	2,6	0,6	– 2,0
Média	4,3	2,1	– 2,2	4,4	1,6	–2,8

Acúmulo de Capital *versus* Progresso Tecnológico

- A Tabela anterior ilustra três fatos importantes:
  - O período de alto crescimento do produto *per capita*, de 1950 a 1973, deveu-se ao rápido progresso tecnológico, e não a um acúmulo de capital excepcionalmente alto.
  - A desaceleração do crescimento do produto *per capita* a partir de 1973 originou-se da queda na taxa de progresso tecnológico, e não de um acúmulo de capital excepcionalmente baixo.
  - A convergência do produto *per capita* entre os países originou-se do maior progresso tecnológico e não do acúmulo mais rápido de capital, em países que estavam mais para trás.

Por que houve a desaceleração do progresso tecnológico em meados da década de 1970?

- A primeira hipótese é a que a desaceleração é resultado de um erro de mensuração.
  - Em muitos setores não é fácil medir a produtividade.
  - As Contas de Renda Nacional e Produto Nacional fazem suposições simples sobre o progresso tecnológico desses setores.

Por que houve a desaceleração do progresso tecnológico em meados da década de 1970?

- A segunda hipótese é a de que, nas **economias pós-industriais**, a participação do setor industrial no PIB está em constante declínio e a dos serviços em expansão.
  - O escopo do progresso tecnológico é mais limitado no setor de serviços do que no setor industrial.
- Entretanto, a desaceleração no crescimento da produtividade afetou praticamente todos os setores. O declínio tem sido praticamente o mesmo no setor industrial e no de serviços.

Por que houve a desaceleração do progresso tecnológico em meados da década de 1970?

- A terceira hipótese é a de que houve um declínio geral da P&D, que levou a um declínio da taxa de progresso tecnológico.
- Entretanto, os fatos não sustentam essa hipótese. Os gastos com P&D permaneceram constantes ou aumentaram como percentual do PIB entre 1963 e 1989.

Por que houve a desaceleração do progresso tecnológico em meados da década de 1970?

Gastos com P&D como percentual do PIB			
	1963	1975	1989
França	1,6	1,8	2,3
Alemanha	1,4	2,2	2,9
Japão	1,5	2,0	3,0
Reino Unido	2,3	2,0	2,3
Estados Unidos	2,7	2,3	2,8

Epílogo: os Segredos do Crescimento

- Diferenças no produto por trabalhador entre países ricos e pobres são atribuídas principalmente a diferenças no nível de tecnologia medido nesses países. Por várias razões, os países pobres não conseguem diminuir esta ***defasagem tecnológica***.
- Outras razões incluem direitos de propriedade mal definidos, instabilidade política, escassez de empreendedores e mercados financeiros pouco desenvolvidos.

Epílogo: os Segredos do Crescimento

- Os países pobres que cresceram rapidamente nos últimos 20 anos experimentaram o acúmulo rápido de capital, tanto físico quanto humano.
- Alguns desses países basearam-se na importância do comércio exterior, no livre mercado e na intervenção governamental limitada, enquanto outros optaram pela intervenção governamental pela ***política industrial*** — uma política destinada a incentivar o crescimento de indústrias específicas.

Exercícios

- **1) Bacen – 2006**
- 45) A função de produção de uma economia é:

$$y = k^{\frac{1}{2}}$$

- Onde:
- y = produto por trabalhador
- k = estoque de capital por trabalhador
- Sabe-se também que:
- s = taxa de poupança = 20%
- n = taxa anual de crescimento populacional = 1%
- δ= taxa de depreciação anual = 4%

a) no estado estacionário (*steady state*) dessa economia o nível de renda de equilíbrio por trabalhador (y*) é igual a16

b) estoque de capital por trabalhador (k*) é igual a 4

c) valor da depreciação anual dos equipamentos é maior que o valor do investimento por trabalhador

d) nível de renda de equilíbrio por trabalhador (y*) é igual a 5

e) o produto total e o capital total crescem à mesma taxa que a população, ou seja, 1%

- Calculando o estoque de capital no estado estacionário:

$$\dot{k} = sk^{\alpha} - (\delta + n)k \rightarrow \quad \dot{k} = 0 \Rightarrow k^* = \left(\frac{s}{\delta + n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

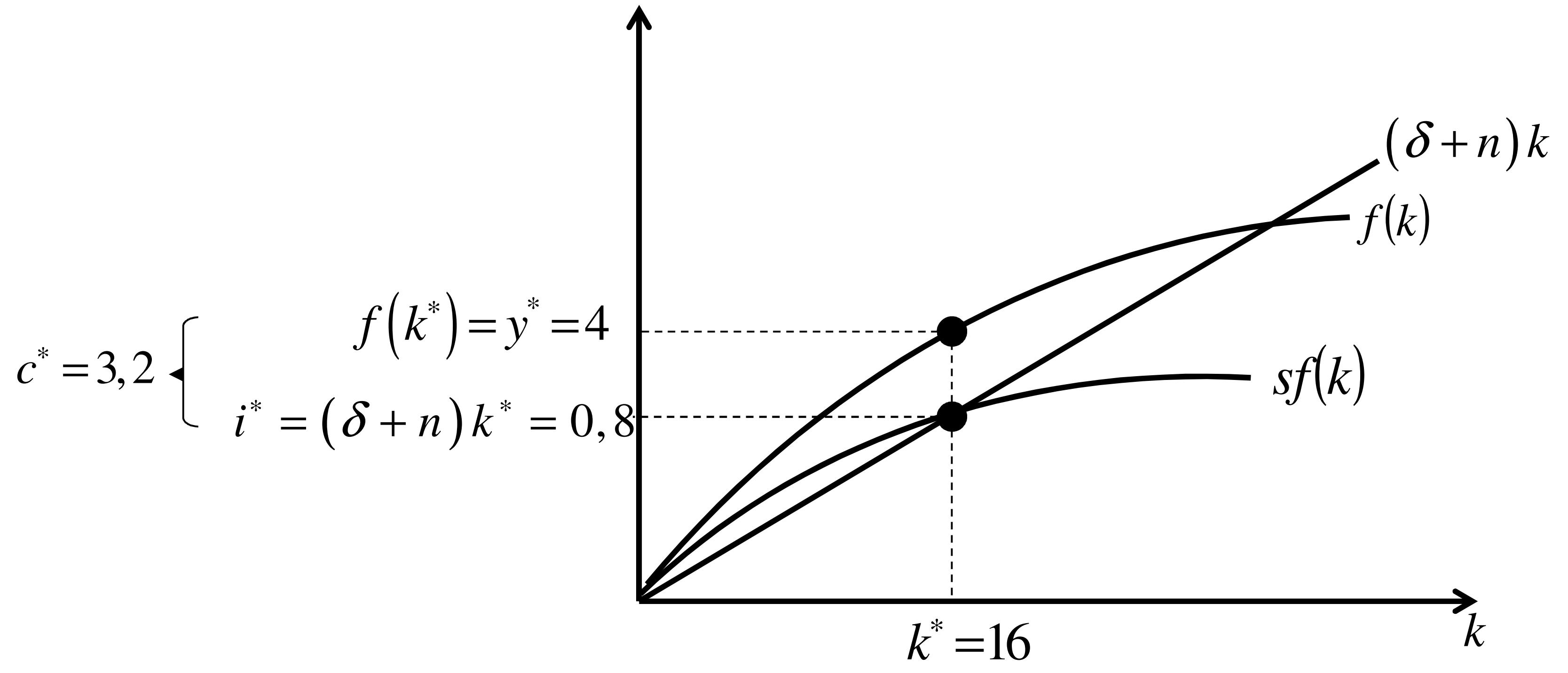
$$k^* = \left(\frac{0,2}{0,04 + 0,01}\right)^{\frac{1}{1-0,5}} \Rightarrow k^* = 16 \rightarrow y^* = k^{*\left(\frac{1}{2}\right)} \Rightarrow y^* = 4$$

- Logo, (a) , (b) e (d) são falsas.
- (c) é falsa, pois no estado estacionário i = (δ+n)k . Como n > 0, no estado estacionário o i > δk. Calculando, temos:

$$i^* = sy^* \Rightarrow i^* = 0,2 \bullet 4 = 0,8$$

$$\delta k^* = 0,04 \bullet 16 = 0,64$$

$$(\delta + n)k^* = (0,04 + 0,01)16 = 0,8$$



$c^* = 3,2$
$f(k^*) = y^* = 4$
$i^* = (\delta + n)k^* = 0,8$
$(\delta + n)k$
$f(k)$
$sf(k)$
$k^* = 16$
k

- Logo, a assertiva (e) é verdadeira.
- Taxas de Crescimento no estado estacionário

$$No \quad estado \quad estacionário \quad \dot{k} = 0 \Rightarrow \frac{\dot{k}}{k} = 0. \quad Logo, \quad \dot{y} = 0 \Rightarrow \frac{\dot{y}}{y} = 0$$

$$k = \frac{K}{N} \Rightarrow \ln k = \ln K - \ln N. \quad Diferenciando, \quad temos: \quad \cancelto{0}{\frac{\dot{k}}{k}} = \frac{\dot{K}}{K} - \cancelto{n}{\frac{\dot{N}}{N}} \Rightarrow \frac{\dot{K}}{K} = n$$

$$y = \frac{Y}{N} \Rightarrow \ln y = \ln Y - \ln N. \quad Diferenciando, \quad temos: \quad \cancelto{0}{\frac{\dot{y}}{y}} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \cancelto{n}{\frac{\dot{N}}{N}} \Rightarrow \frac{\dot{Y}}{Y} = n$$

- O estoque de capital total e o pib crescem à taxa n = 1%.

- **2) Bacen – 2002 – Analista – prova b2 – Gabarito 1**
- 49- Considere o modelo de crescimento de Solow sem crescimento populacional e progresso tecnológico.
- Suponha as seguintes informações:

$$y = k^{0,5}$$

- $\delta = 0,05$
- Onde:
- y = produto por trabalhador;
- k = estoque de capital por trabalhador;
- δ = taxa de depreciação.

- Com base nestas informações, os níveis de produto por trabalhador; estoque de capital por trabalhador; taxa de poupança; investimento por trabalhador; e consumo por trabalhador, no estado estacionário e supondo a “regra de ouro” são, respectivamente:

- a) 10; 100; 0,25; 3; 7
- b) 10; 100; 0,25; 4; 6
- c) 5; 25; 0,5; 3; 2
- d) 5; 25; 0,5; 2,5; 2,5
- e) 10; 100; 0,5; 5; 5

- Vamos resolver a questão utilizando alguns resultados que vimos anteriormente; fundamentalmente, que s** = α . Dito de outro modo, a taxa de poupança que determina o estoque de capital em estado estacionário maximizador do consumo é igual a elasticidade do capital. Logo, o item correto é (e).

$$k^{**} = \left(\frac{sA}{\delta + n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \Rightarrow k^{**} = \left(\frac{0,5 \bullet 1}{0,05 + 0}\right)^{\frac{1}{1-0,5}} \Rightarrow k^{**} = 100$$

$$y^{**} = 100^{0,5} = 10$$

$$c^{**} = (1 - s)\, y^{**} = 5$$

$$i^{**} = sy^{**} = 5$$

- **3) (BNDES – Economista – 2005)**
- 36 -Sobre o Modelo de Crescimento de Solow, é correto afirmar que:

a) sem a presença de progresso técnico, uma redução da propensão a poupar levará necessariamente a um aumento do consumo por trabalhador;

b) sem a presença de progresso técnico, quanto maior a propensão a poupar, maior será a taxa de crescimento do produto por trabalhador no longo prazo;

c) sem a presença de progresso técnico, no longo prazo, a relação produto/capital crescerá à medida que se eleva a taxa de crescimento da força de trabalho;

d) sem a presença de progresso técnico, o nível ótimo de capital por trabalhador estabelecido pela “Regra de Ouro” é aquele que maximiza a taxa de crescimento do produto por trabalhador no longo prazo;

e) na presença de progresso técnico, no estado estacionário, a taxa de crescimento do produto por trabalhador será igual à taxa de crescimento da eficiência do trabalho.

- (a) é falsa, pois uma redução em s pode aumentar ou reduzir o consumo no estado estacionário. Depende da relação entre a PMgk e (δ+n).
- (b) é falsa, pois um aumento em s aumenta o produto *per capita* (nível), mas a taxa de crescimento do pib *per capita,* em qualquer estado estacionário, é a mesma; zero.
- (c) é falsa. Como vimos, sem progresso técnico, o estoque de capital total e o produto total crescem à mesma taxa, n. Logo, um aumento na taxa de crescimento populacional não aumenta a relação produto/ capital (ela fica constante).
- (d) é falsa, pois k** maximiza o consumo por trabalhador. Novamente, em qualquer estado estacionário, a taxa de crescimento do produto *per capita* é a mesma.

- Logo, (e) é verdadeira. Como vimos anteriormente, no estado estacionário com progresso técnico, a taxa de crescimento do pib *per capita* é igual a g_A.