Cálculo: O Básico.

Curso DSc

Prof.: Antonio Carlos Assumpção

Derivadas

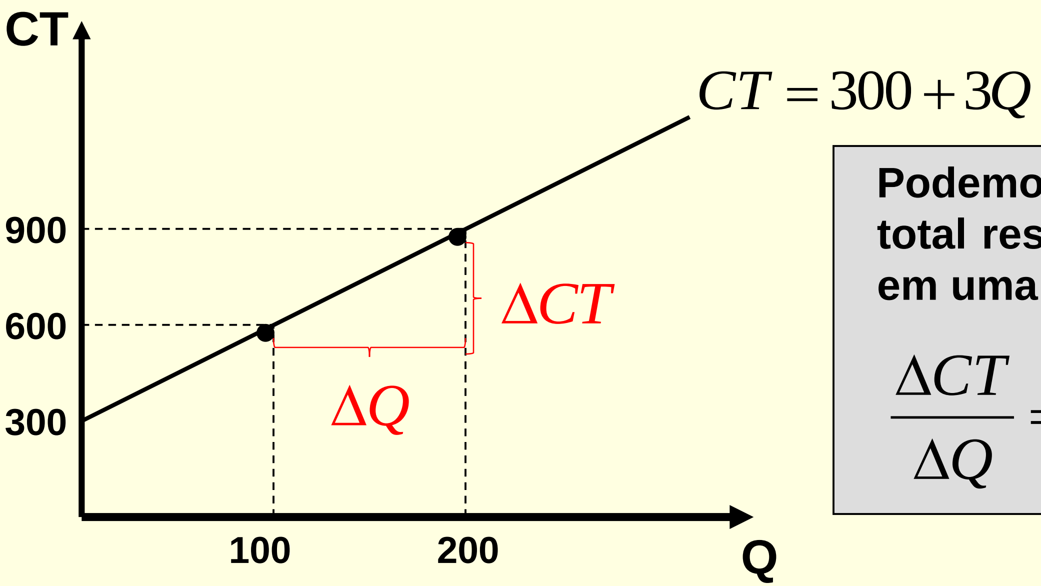
- A diferenciação é uma técnica matemática do ramo do cálculo que serve, sobretudo, para analisar taxas de variação e otimizar funções.

- Suponha que a função de custo de um produtor de aço possa ser representada por:

$$\boxed{CT = 300 + 3Q}$$

  - Onde Q representa a quantidade produzida.

Derivadas



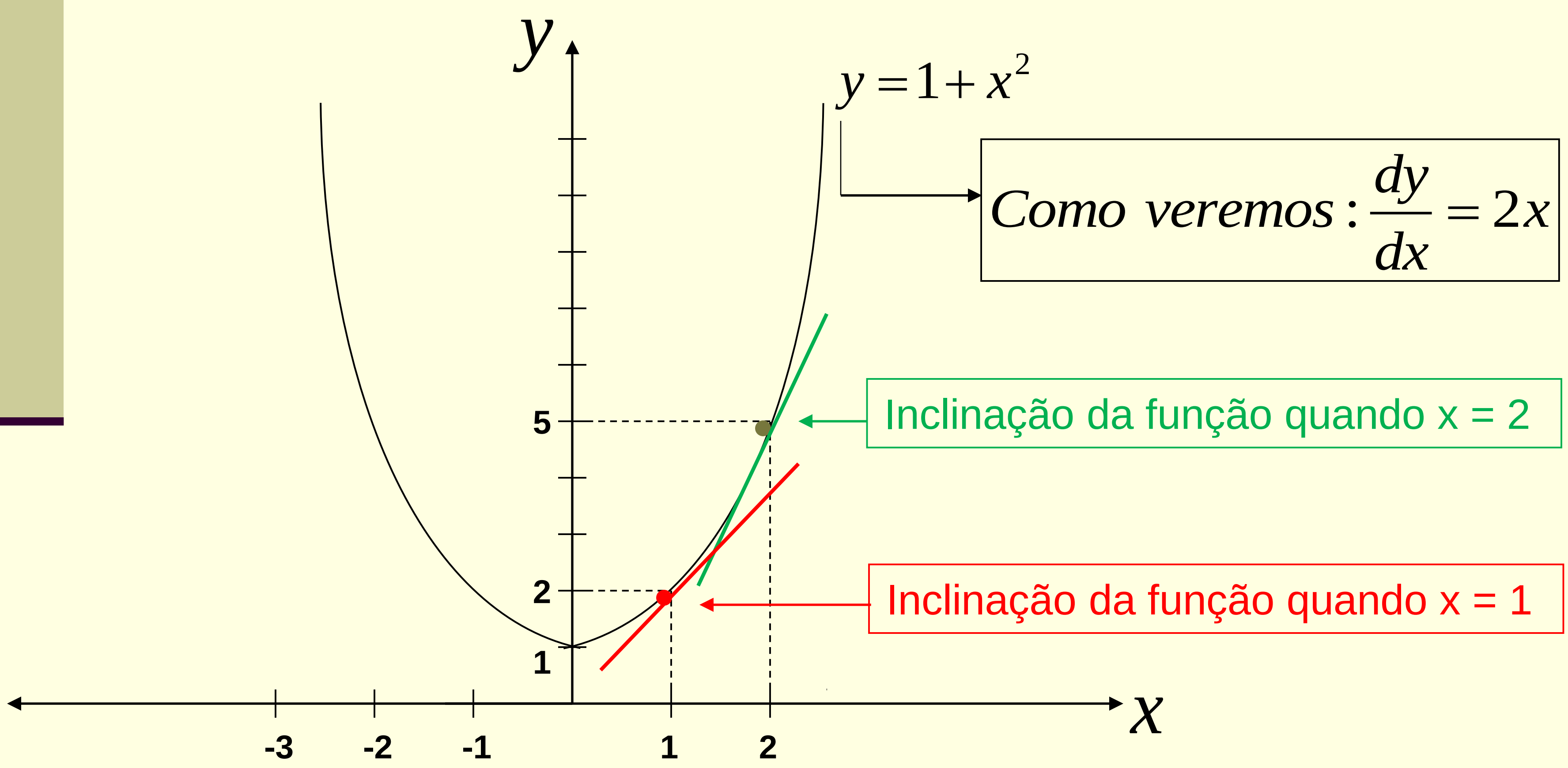
Podemos calcular a variação do custo total resultante da variação da produção em uma unidade.

$$\frac{\Delta CT}{\Delta Q} = \frac{300}{100} = 3$$

- Como veremos, 3 é a derivada da função CT = 300 +3Q , que mede a inclinação dessa função, ou sua taxa de variação.

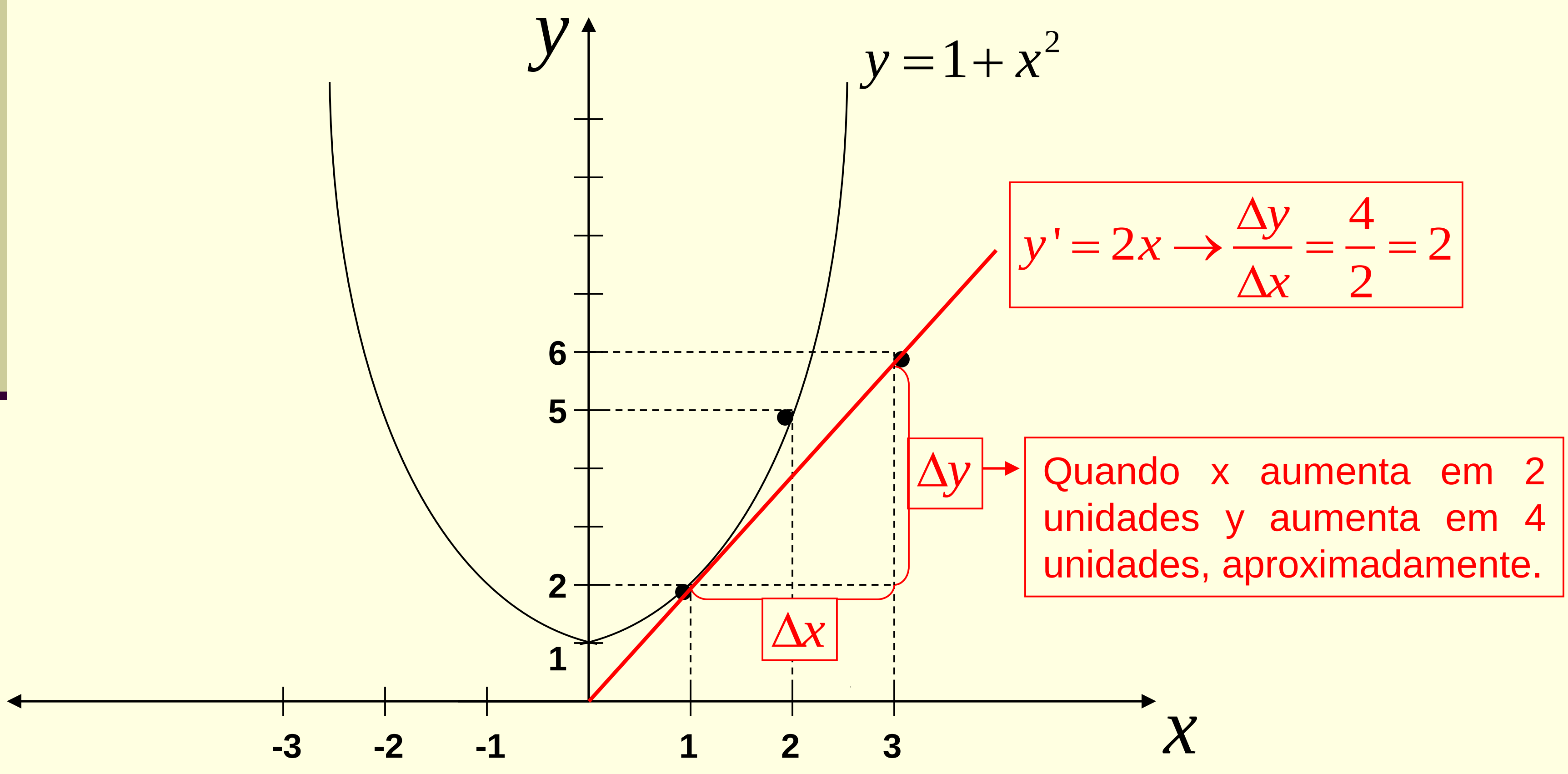
Derivadas

- Entretanto, se a função não fosse linear, não poderíamos proceder desta forma, já que a função possuiria várias taxas de variação. Como exemplo, tomemos a função $y = 1 + x^2$.



Derivadas

- Como a derivada da função $y = 1 + x^2$ é $y' = 2x$, a inclinação da função é igual a 2, quando x = 1 e 4 quando x = 2. Ou seja, a derivada da função nada mais é do que a inclinação da reta tangente que passa pelo ponto.



Derivadas

- A função $y = 1 + x^2$ possui diversas taxas de variação. A inclinação é igual a 2 somente no ponto onde x = 1.

$$\text{Derivada}: \frac{dy}{dx} \cong \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad quando \quad \Delta x \to 0$$

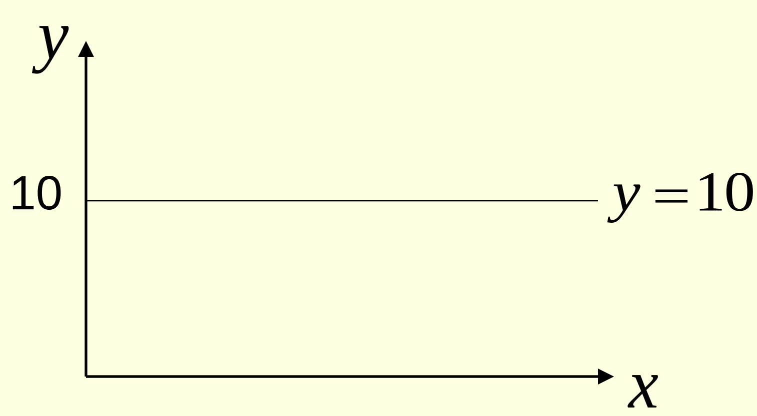
Mede a taxa de variação da função em um ponto, ou a inclinação da reta tangente que passa por esse ponto.

Técnicas de Derivação

Notação $\rightarrow$ $y = f(x) \rightarrow \dfrac{dy}{dx} = y' = f'(x)$

$$y = k \Rightarrow y' = 0 \quad , \quad sendo \quad k \quad uma \quad constante.$$

$$Logo, se \quad y = 10 \Rightarrow y' = 0$$



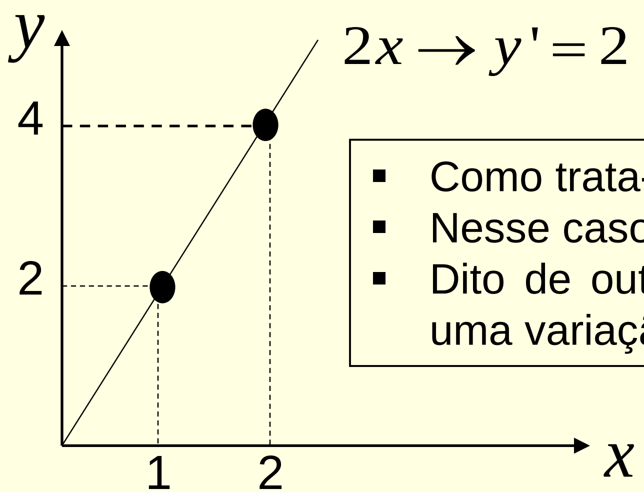
Como trata-se de uma função constante, a inclinação é igual a zero.

Técnicas de Derivação

$$y = nx \Rightarrow y' = n$$

$$Logo, \quad se \quad y = 2x \Rightarrow y' = 2$$

$$se\ y = 10x \Rightarrow y' = 10$$



- Como trata-se de uma função linear, a inclinação é constante.
- Nesse caso, como y = 2x , a inclinação é igual a 2.
- Dito de outro modo, a taxa de variação de y em resposta a uma variação em x é igual a 2, sempre.

Técnicas de Derivação

$$y = x^n \Rightarrow y' = nx^{n-1}$$

$$Logo, \quad se \quad y = x^2 \Rightarrow y' = 2x$$

$$se\; y = 3x^2 \Rightarrow y' = 6x$$

Note que a taxa de variação da função é diferente para cada valor de x

Técnicas de Derivação

$$y = \sqrt[n]{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}} \quad \forall \quad x \neq 0$$

$$Logo, se\; y = \sqrt[3]{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^{2}}$$

$$se\; y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Técnicas de Derivação

$$y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{x'}{x}$$

$$Logo, se\ y = \ln z \Rightarrow y' = \frac{1}{z}$$

Diferencial de Uma Função

$$Se \quad y = 2x \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$$

$$Logo, \quad \Delta y \cong 2\Delta x \quad \text{ou, para variações infinitesimais:}$$

$$\boxed{dy = 2dx}$$

Técnicas de Derivação

- Regra do Produto

$$y = u \bullet v \Rightarrow y' = u' \bullet v + u \bullet v'$$

$$y = \underbrace{3x}_{u} \bullet \underbrace{\left(x^2 + 1\right)}_{v}$$

$$y' = 3\left(x^2 + 1\right) + 3x \bullet 2x \Rightarrow 3x^2 + 3 + 6x^2 \Rightarrow 9x^2 + 3$$

Técnicas de Derivação

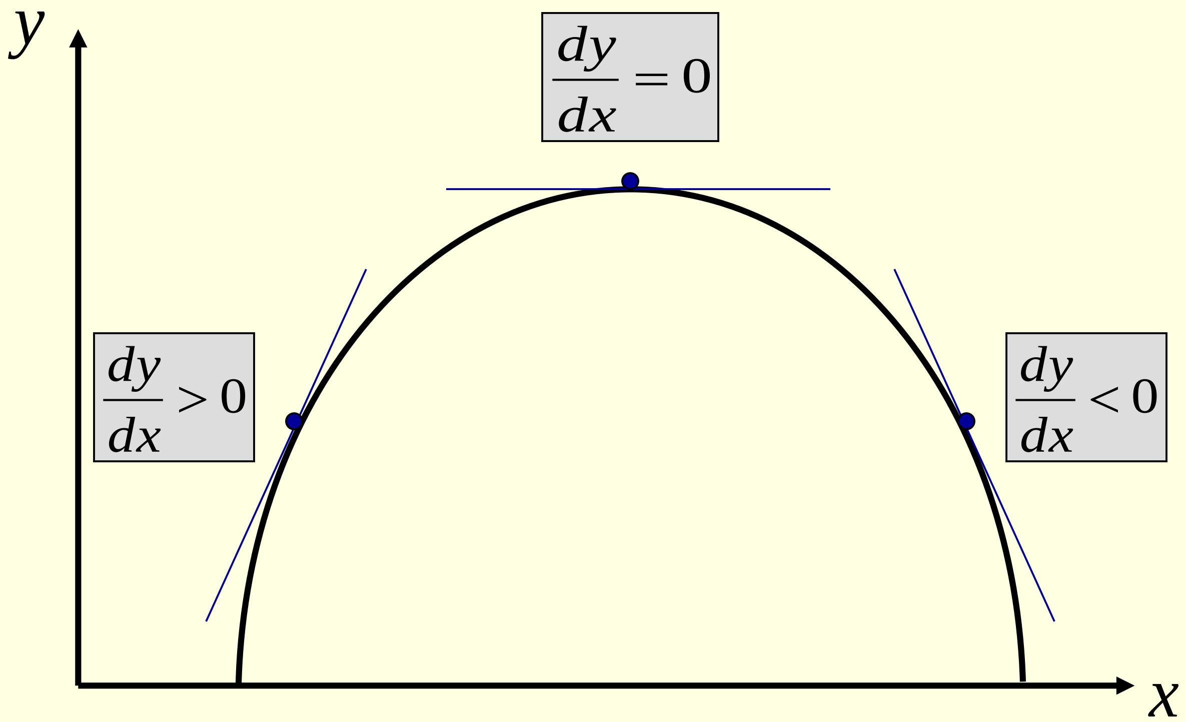
- Regra do Quociente

$$y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u' \bullet v - u \bullet v'}{v^2}$$

$$y = \frac{x^2}{x+1} \begin{array}{l} \longrightarrow u \\ \longrightarrow v \end{array}$$

$$y' = \frac{2x(x+1) - (x^2) \bullet 1}{(x+1)^2} \Rightarrow \frac{2x^2 + 2x - x^2}{(x+1)^2} \Rightarrow \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$$

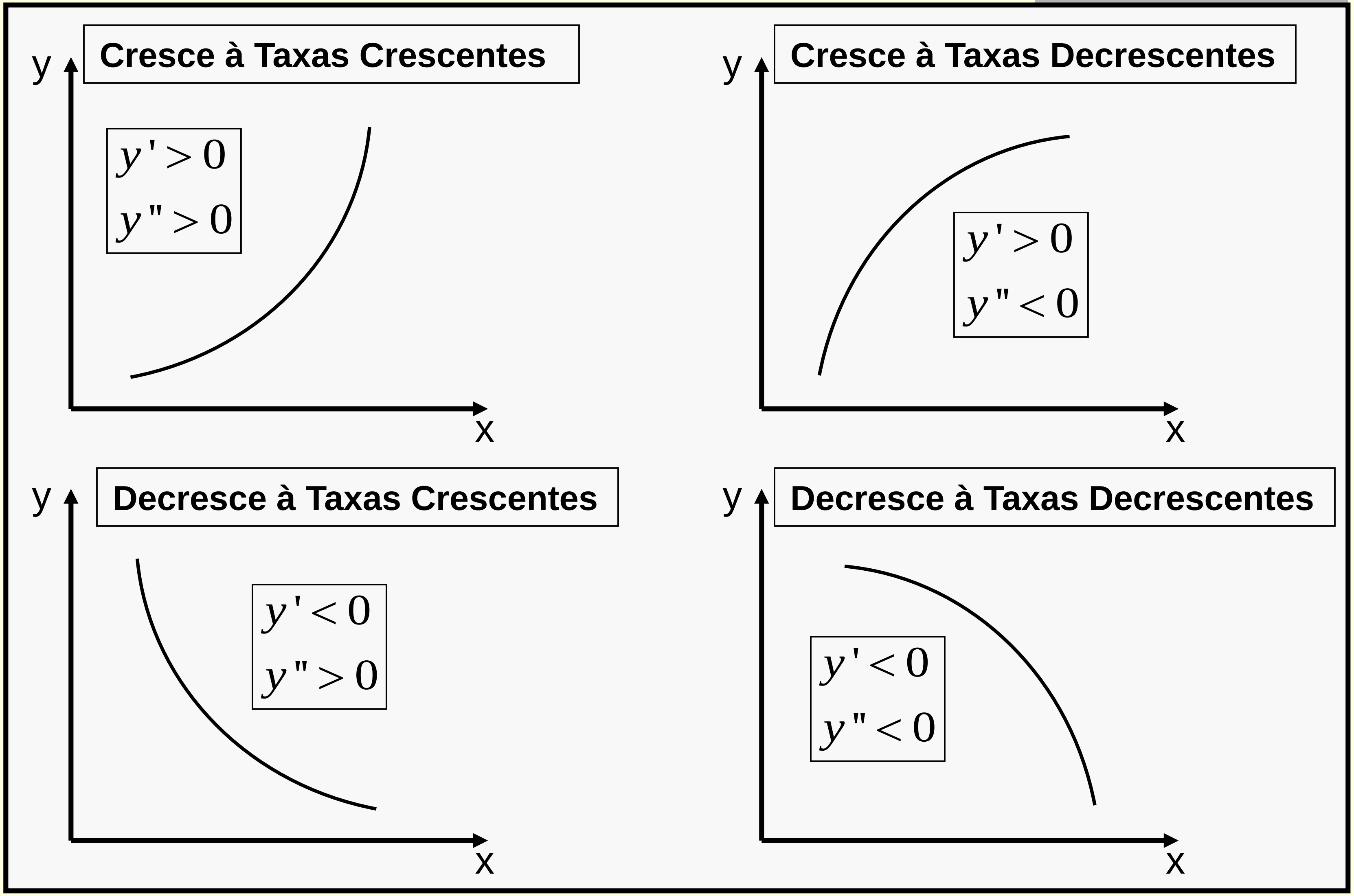
Máximos e Mínimos de Funções



- No ponto onde a derivada da função é igual a zero a função não possui inclinação, portanto, a taxa de variação é igual a zero. Neste caso, chamamos tal ponto de ponto crítico, que pode ser um ponto de máximo, mínimo ou inflexão.

As Derivadas de Segunda Ordem

A segunda derivada nos mostra se a função cresce à taxas crescentes (>0) ou decrescentes (<0).



Máximo ou Mínimo ?

- Procedimentos

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow$$

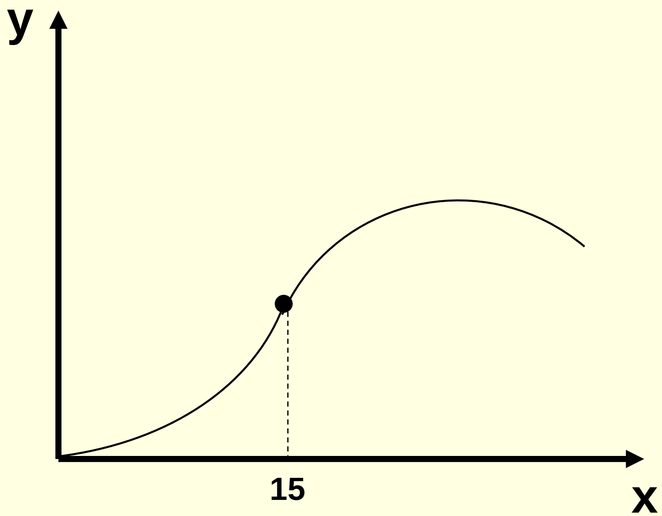
Pontos Críticos

$$\frac{d^2y}{dx^2} < 0 \Rightarrow Máximo$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} > 0 \Rightarrow Mínimo$$

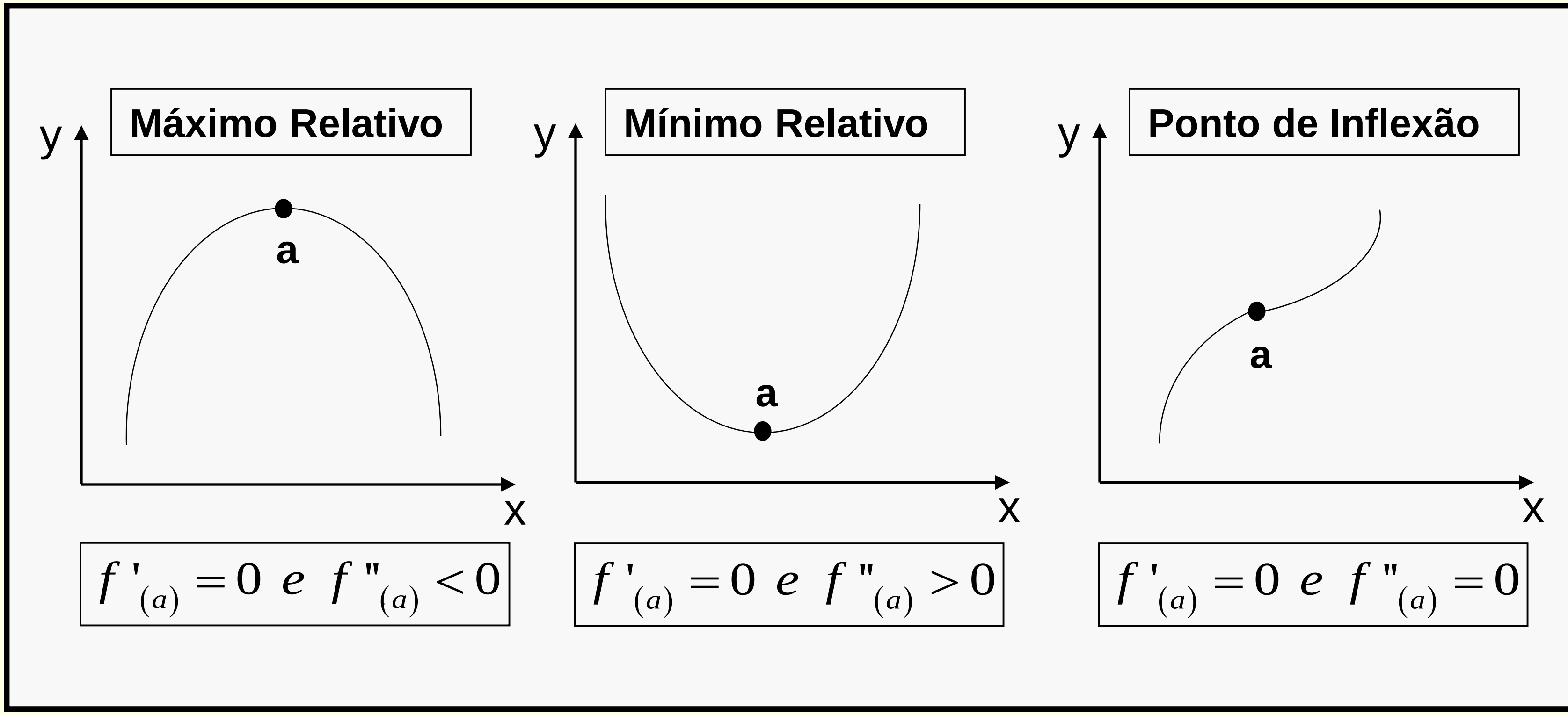
Ponto de Infexão

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow$$ Pontos Críticos $\rightarrow$ $$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \Rightarrow \mathit{Inflexão}$$



- Note que a função possui um ponto de inflexão para x = 15.
- Com x < 15 , y cresce à taxas crescentes e com x > 15 , cresce à taxas decrescentes.
- Logo, a segunda derivada da função é igual a zero para x = 15.

Pontos de Máximo, Mínimo e Inflexão



Maximização da RT

- Suponha que a demanda de certa firma seja dada por:

$$\boxed{P = 100 - 10Q}$$

❖*Logo, como RT = P.Q , temos:* $\boxed{RT = 100Q - 10Q^2}$

❖A receita total será máxima quando a receita marginal for igual a zero.

$$\boxed{RMg = \frac{dRT}{dQ} = 0 \Rightarrow 100 - 20Q = 0 \Rightarrow 20Q = 100}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Q = 5 \\ P = 50 \end{array}}$$

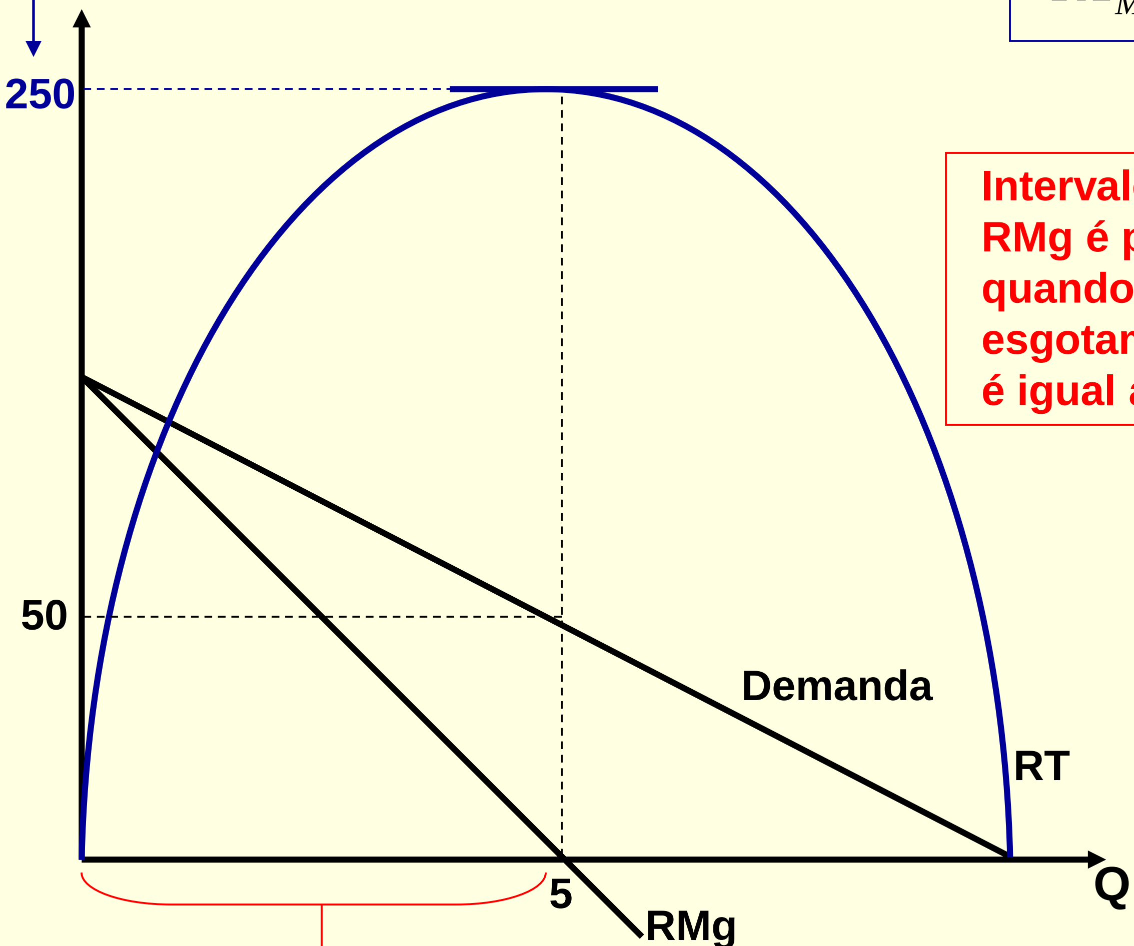
❖*Checando se é um ponto de máximo.*

$$\boxed{\frac{d^2RT}{dQ^2} = -20 < 0 \Rightarrow Máximo}$$

Maximização da RT

- Graficamente

$$RT_{Máx} = P(50) \bullet Q(5) = 250$$



Intervalo onde a RT cresce, pois a RMg é positiva: a RT é maximizada quando os acréscimos de receita esgotam-se, ou seja, quando a Rmg é igual a zero.

Demanda

$$P = 100 - 10Q$$

$$RMg = 100 - 20Q$$

Derivadas Parciais

- O valor de uma variável pode depender de mais de uma variável. Por exemplo, a produção de trigo (Q) pode depender da quantidade de terra (T) da quantidade de trabalho (L) e da quantidade de fertilizantes (F).
- Se estivermos interessados em saber qual o impacto sobre a produção de trigo, induzido por um pequeno acréscimo na quantidade de trabalho, mantidos os outros insumos constantes, estamos utilizando o conceito de derivada parcial; a derivada da quantidade de trigo em relação a quantidade de trabalho, que escrevemos como se segue:

$$\boxed{Q = f\left(T, L, F\right)}$$

$$\boxed{\frac{\partial Q}{\partial L}} \longrightarrow$$

- **Produtividade Marginal do Trabalho: PMgL.**
- Variação no produto induzida por uma variação no fator trabalho, mantidos constantes todos os outros fatores.

Exemplos

- A) $Q = x^2 + 4xy + y^2$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x + 4y$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = 4x + 2y$$

- B) $RT_1 = 30q_1 - q_1^2 - q_1 q_2$

$$RMg_1 = \frac{\partial RT_1}{\partial q_1} = 30 - 2q_1 - q_2$$

Derivada Total

- Se $\boxed{U = f\left(x, y\right) \;\; \Rightarrow \;\; dU = \underbrace{\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy}}$

Calcula a variação na utilidade proveniente de uma variação conjunta em x e y.

Utilidade total resultante do consumo de x e y.

Curva de Indiferença

- Dada uma função utilidade, tal que uma curva de indiferença seja representada por U(x,y) = C, onde C é uma constante que mede o nível de utilidade, se tomarmos a diferencial total, devemos ter:

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial x}dx} + \boxed{\frac{\partial U}{\partial y}dy} = 0$$

Variação na utilidade total proveniente de uma variação na quantidade do bem Y.

Variação na utilidade total proveniente de uma variação na quantidade do bem X.

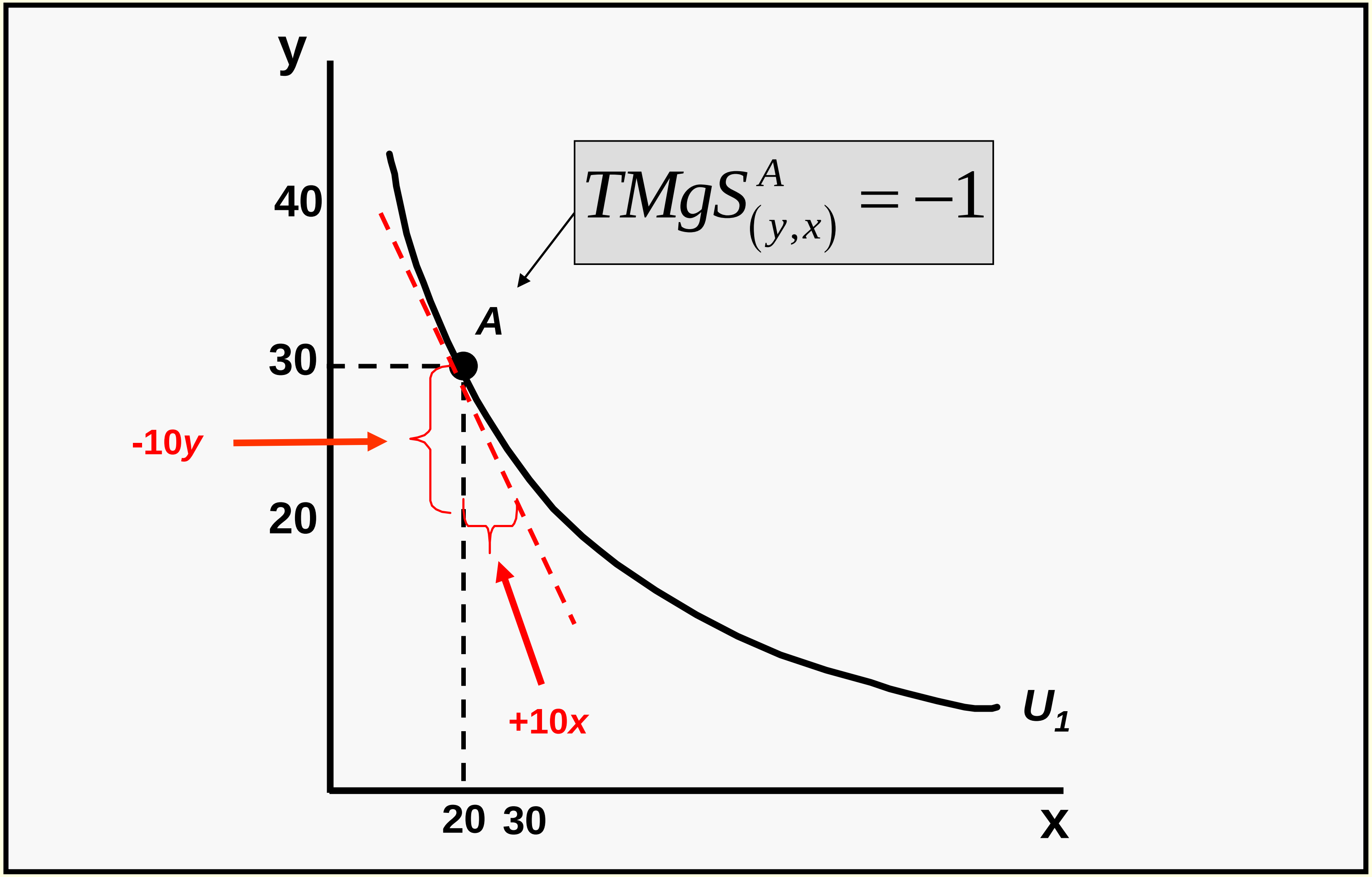
Taxa Marginal de Substituição

- Resolvendo para para dy / dx, a inclinação da curva de indiferença, temos:

$$\frac{\partial U}{\partial y} dy = \frac{\partial U}{\partial x} dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial y}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{UMgx}{UMgy} = TMgS_{(y,x)}$$

- Logo, a $TMgS_{(y,x)}$ é a razão entre as utilidades marginais de x e y e é dada pela inclinação da curva de indiferença em um ponto.

Graficamente



TMgS Para Uma Cobb-Douglas

$$Seja \quad U(x,y) = x^{\alpha} y^{\beta}$$

$$TMgS_{(\mathrm{y,x})} = -\frac{\dfrac{\partial U}{\partial x}}{\dfrac{\partial U}{\partial y}}$$

$$-\frac{\alpha x^{\alpha-1} y^{\beta}}{\beta x^{\alpha} y^{\beta-1}} = -\frac{\alpha y^{\beta} y^{-\beta+1}}{\beta x^{\alpha} x^{-\alpha+1}} = -\frac{\alpha y^{\beta-\beta+1}}{\beta x^{\alpha-\alpha+1}} = -\frac{\alpha y}{\beta x}$$

$$Note \ que, \ \ se \ U(x,y) = x^{0,5} y^{0,5} \rightarrow TMgS_{(\mathrm{y,x})} = -\frac{y}{x}$$

As TMgs$_{(y,x)}$ de Algumas Funções

- Cobb-Douglas

$$U(x,y) = x^{\alpha} y^{\beta} \rightarrow TMgS_{(y,x)} = -\frac{\alpha y}{\beta x}$$

- Substitutos Perfeitos

$$U(x,y) = \alpha x + \beta y \rightarrow TMgS_{(y,x)} = -\frac{\alpha}{\beta} \quad (Constante)$$

- Complementos Perfeitos

$$U(x,y) = \min\{\alpha x, \beta y\} \rightarrow TMgS_{(y,x)} = 0$$

Equação da Curva de Indiferença

- Suponha que um consumidor possa ser representado pela seguinte função utilidade:

$$\boxed{U_{(Z,W)} = Z^{\frac{1}{3}} W^{\frac{2}{3}}}$$

- A curva de indiferença nos mostra todas as combinações de Z e W que permitem ao consumidor o mesmo nível de utilidade. Logo, sobre uma curva de indiferença a utilidade é constante. Assim, temos:

$$\overline{U} = Z^{\frac{1}{3}} W^{\frac{2}{3}} \Rightarrow W^{\frac{2}{3}} = \frac{\overline{U}}{Z^{\frac{1}{3}}} = W^{\frac{2}{3}} \Rightarrow W = \left(\frac{\overline{U}}{Z^{\frac{1}{3}}} \right)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \boxed{W = \frac{\overline{U}^{\frac{3}{2}}}{Z^{\frac{1}{2}}}}$$

Exemplo Quantitativo de Uma FDP no Curto Prazo

$$Seja \quad Q = -L^3 + 45L^2 \quad uma \quad função \quad de \quad produção,$$

$$onde \quad L \quad representa \quad o \quad n° \quad de \quad trabalhadores:$$

a) Determine as funções PMgL e PMeL.

b) Determine o número de trabalhadores para obtermos o máximo da PMeL e da PMgL.

c) Determine os valores máximos para a PMeL e para a PMgL.

d) Qual o nível máximo de produto que pode ser obtido ?

Exemplo Quantitativo de Uma FDP no Curto Prazo

- **A)**

$$PMgL = \frac{\Delta Q}{\Delta L} = \frac{dQ}{dL} \Rightarrow \boxed{PMgL = -3L^2 + 90L}$$

$$PMeL = \frac{Q}{L} = \frac{-L^3 + 45L^2}{L} \Rightarrow \boxed{PMeL = -L^2 + 45L}$$

Exemplo Quantitativo de Uma FDP no Curto Prazo

- **B)**

$$máx.\ PMgL \Rightarrow \frac{dPMgL}{dL} = 0 \Rightarrow -6L + 90 = 0 \Rightarrow \boxed{L = 15}$$

$$Checando\ se\ é\ um\ ponto\ de\ máximo:$$

$$\frac{d^2 PMgL}{dL^2} = -6 < 0 \Rightarrow máximo$$

Exemplo Quantitativo de Uma FDP no Curto Prazo

- **B)**

$$máx.\ \ PMeL \Rightarrow \frac{dPMeL}{dL} = 0 \Rightarrow -2L + 45 = 0 \Rightarrow \boxed{L = 22{,}5}$$

$$Checando\ se\ é\ um\ \ ponto\ de\ máximo:$$

$$\frac{d^2PMeL}{dL^2} = -2 < 0 \Rightarrow máximo$$

Exemplo Quantitativo de Uma FDP no Curto Prazo

- **c)**

$$L = 15 \Rightarrow PMgL = -3(15)^2 + 90(15) \Rightarrow$$

$$\boxed{PMgL_{(15)} = 675}$$

$$L = 22{,}5 \Rightarrow PMeL = \frac{-(22{,}5)^3 + 45(22{,}5)^2}{22{,}5} \Rightarrow$$

$$\boxed{PMeL_{(22{,}5)} = 506{,}25}$$

Exemplo Quantitativo de Uma FDP no Curto Prazo

- **D)**

$$produto\ máximo \Rightarrow PMgL = 0 \Rightarrow \frac{dQ}{dL} = 0$$

$$\frac{dQ}{dL} = 0 \Rightarrow -3L^2 + 90L = 0 \Rightarrow dois\ \ pontos\ \ \ críti\,\mathrm{cos}:$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow \frac{-90 \pm \sqrt{8100 - 0}}{-6} \Rightarrow L_1 = 0 \quad e \quad \boxed{L_2 = 30}$$

Exemplo Quantitativo de Uma FDP no Curto Prazo

- **D)**

$$checando: \quad \frac{d^2Q}{dL^2} = -6L + 90 < 0 \Rightarrow \quad máximo$$

$$com\ \ L = 30 \Rightarrow \boxed{Q_{máx} = 13500}$$

- **Note que a função de produção possui um ponto de inflexão, para L = 15. Com L < 15 o produto cresce à taxas crescentes e com L > 15 o produto cresçe à taxas decrescentes, ou seja, a segunda derivada da função de produção é igual a zero para L = 15.**

Minimização de Custos no C.P.

- Suponha que uma firma defronte-se com a seguinte função de custos: $CT = q^3 - 4q^2 + 30q + 100$.

$$Logo: CMg = \frac{dCT}{dq} = 3q^2 - 8q + 30$$

$$CMg_{(Min)} : \text{Ponto Crítico} \rightarrow \frac{dCMg}{dq} = 0 \rightarrow 6q - 8 = 0 \rightarrow \boxed{q = 1,33}$$

- Por se tratar de uma função de custos, é de se esperar que exista um ponto de mínimo. Entretanto, podemos checar, através do teste da derivada segunda.

$$\frac{d^2CMg}{dq^2} = 6 > 0$$

Minimização de Custos no C.P.

- Também podemos encontrar a quantidade que minimiza o custo variável médio.

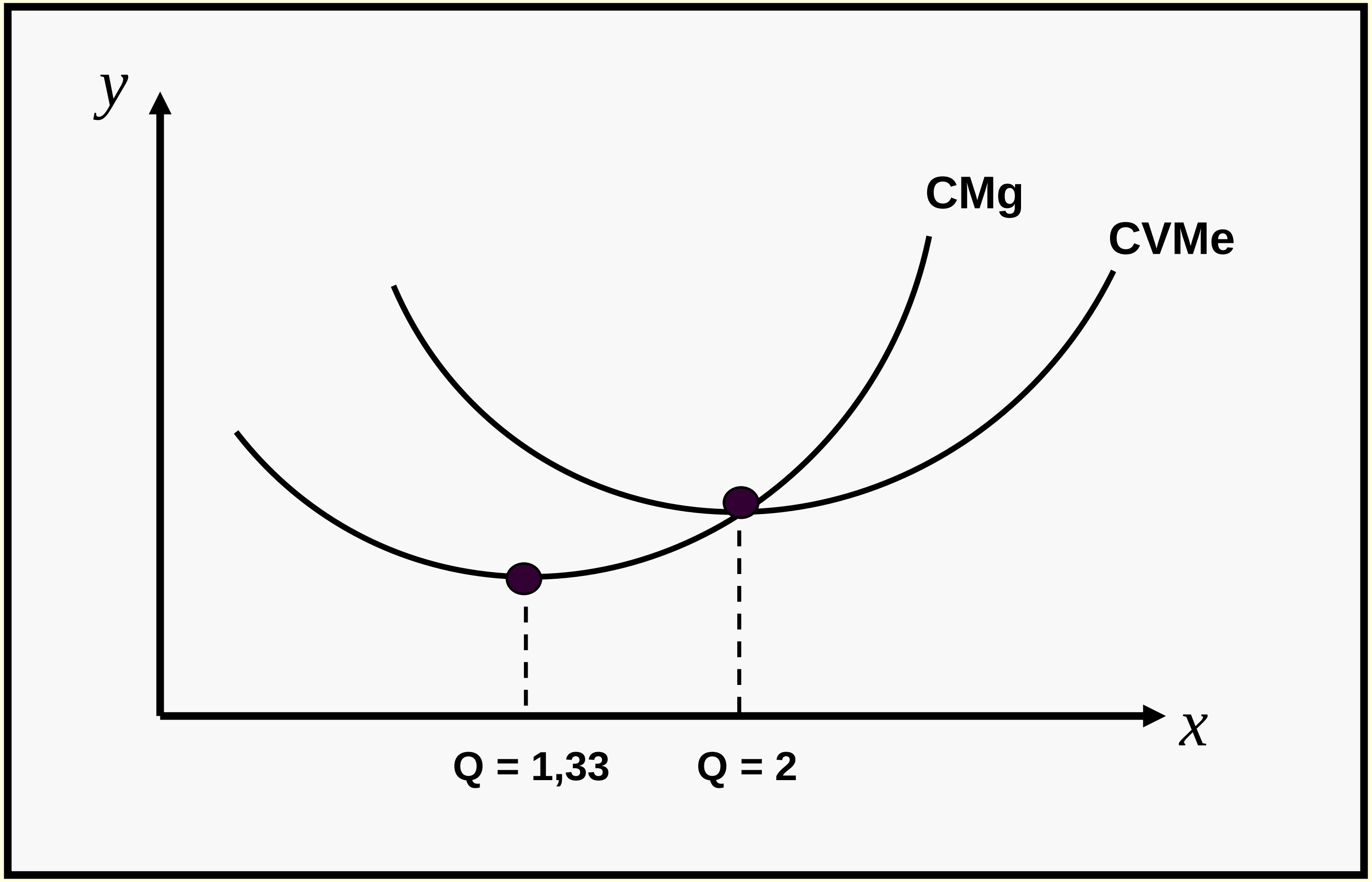
$$CT = q^3 - 4q^2 + 30q + 100$$

$$CVMe = \frac{CV}{q} = q^2 - 4q + 30$$

$$\frac{dCVMe}{dq} = 0 \rightarrow 2q - 4 = 0 \rightarrow \boxed{q = 2}$$

$$\frac{d^2CVMe}{dq^2} = 2 > 0 \rightarrow mínimo$$

Minimização de Custos no C.P.



Maximização da Produção Para Um Certo Custo Total

- Suponha um processo produtivo que possa ser descrito por:

$$Q = 2K^{0,5}L^{0,5} \Rightarrow Q = 2\sqrt{K}\sqrt{L} \quad ,$$

$$com \quad r = 5 \quad , \quad w = 6 \quad e \quad CT = 36000$$

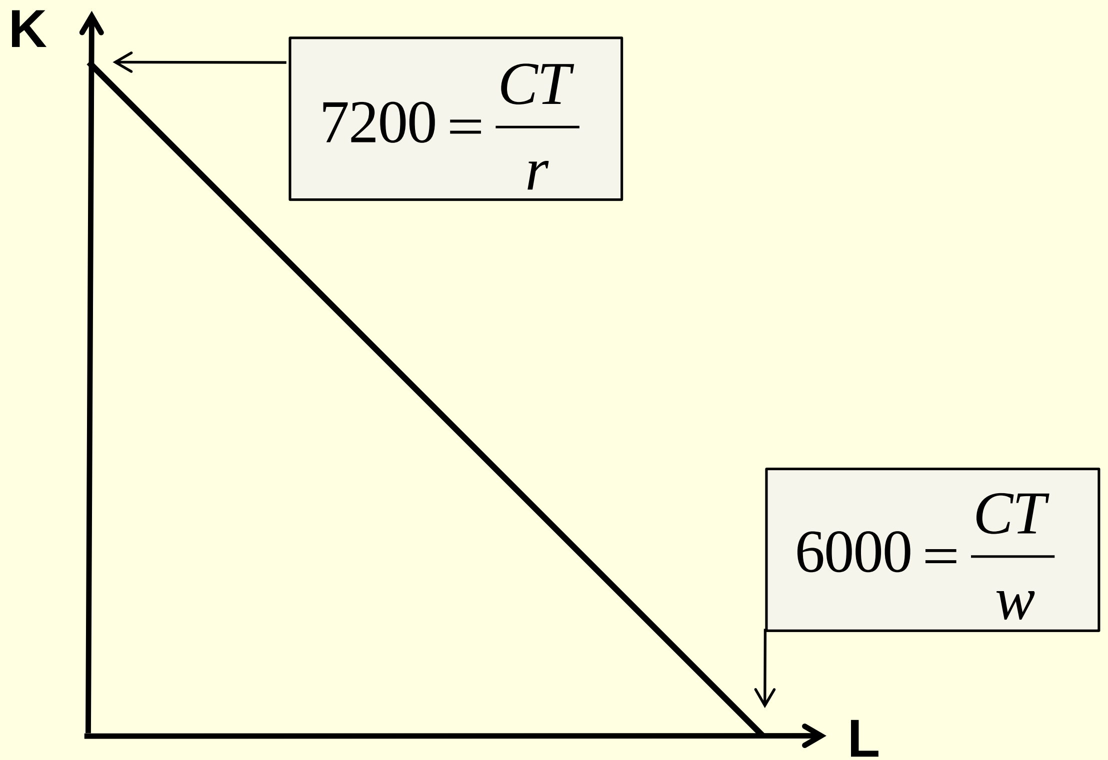
- Logo, a isocusto é dada por:

$$CT = rK + wL \Rightarrow K = \frac{CT}{r} - \frac{w}{r}L$$

Maximização da Produção Para Um Certo Custo Total

$$\boxed{K = 7200 - 1,2L}$$

$$Se \quad K = 0 \Rightarrow L = 6000 = \frac{CT}{w} \quad \rightarrow \quad Se \quad L = 0 \Rightarrow K = 7200 = \frac{CT}{r}$$



Maximização da Produção Para Um Certo Custo Total

- Em equilíbrio, temos:

$$TMg^{T}_{S(K,L)} = -\frac{PMg_L}{PMg_K} \Rightarrow -\frac{\dfrac{\partial Q}{\partial L}}{\dfrac{\partial Q}{\partial K}} = -\frac{\dfrac{2\sqrt{K}}{2\sqrt{L}}}{\dfrac{2\sqrt{L}}{2\sqrt{K}}} = -\frac{2\sqrt{K}}{2\sqrt{L}}\frac{2\sqrt{K}}{2\sqrt{L}} = \boxed{-\frac{K}{L}}$$

$$Em \quad equil. \Rightarrow -\frac{K}{L} = -\frac{w}{r} \Rightarrow \frac{K}{L} = \frac{6}{5} \Rightarrow \boxed{K = 1,2L}$$

Isolinha (caminho de expansão)

- Substituindo na Isocusto, temos:

Maximização da Produção Para Um Certo Custo Total

$$1,2L = 7200 - 1,2L \Rightarrow 2,4L = 7200$$

$$\boxed{L^* = 3000 \Rightarrow K^* \Rightarrow 3600}$$

$$Isoquanta \rightarrow Q = 2\sqrt{3600}\sqrt{3000} \Rightarrow \boxed{Q^* = 6572,67}$$

- Note que, qualquer outra combinação de K e L que custe $36000 representará uma produção menor que 6.572,67.

- Por exemplo, se K = 2400 e L = 4000, temos:

$$36000 = 5 \bullet 2400 + 6 \bullet 4000$$

$$Q = 2\sqrt{2400}\sqrt{4000} \Rightarrow Q = 6196,74$$

Maximização da Produção Para Um Certo Custo Total